ENTWURF VON ABTASTREGELUNGEN MIT PARAMETRISCHEN ÜBERTRAGUNGSFUNKTIONEN (PTF)

Bernhard P. Lampe, Uwe Richter

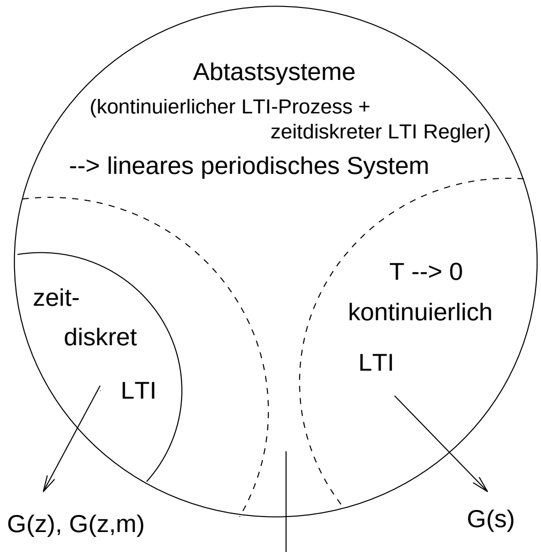
Universität Rostock, Fachbereich Elektrotechnik, Institut für Automatisierungstechnik, 18051 Rostock, Germany.
bernhard.lampe@etechnik.uni-rostock.de

Abstract. Digitale Regelungen und Filterungen von kontinuierlichen Prozessen führen auf Systeme, die sowohl zeitdiskrete als auch kontinuierliche Elemente enthalten. Ihre exakte Behandlung erfordert deshalb die gemeinsame Betrachtung beider Eigenheiten. Die von Y.N. Rosenwasser [8] entwickelte Theorie der Parametrischen Übertragungsfunktion erlaubt eine exakte Beschreibung von weitgehend allgemeinen linearen Abtastsystemen auf der Basis einer durchgehenden Behandlung in kontinuierlicher Zeit und dem zugehörigen Frequenzbereich. Wegen der Ähnlichkeit der PTF zu klassischen Darstellungen lassen sich viele Standardverfahren der Regelungstechnik, die eine Darstellung im Frequenzbereich voraussetzen, auf Abtastsysteme erweitern. Im Vortrag wird ein kurzer Einblick in die Theorie gegeben und ihre Anwendung auf digitale Regelungsprobleme gezeigt.

Key Words. Abtastsystem, Parametrische Übertragungsfunktion, digitale Regelung, minimale Varianz.

1 Einführung

Ein Regelungssystem, in dem digitale Regler oder Filter an kontinuierlichen Prozessen arbeiten, besitzen auch dann ein zeitvariantes Verhalten, wenn alle Prozesse und Algorithmen zeitinvariant sind. Für den einfachsten Fall von linearen zeitinvarianten Elementen mit fester Abtastzeit T erhält man ein lineares periodisches Gesamtsystem. Damit sind Analyse und Entwurf von Abtastsystemen schwieriger zu behandeln als die vergleichbaren Aufgaben für lineare zeitinvariante (LTI) zeitdiskrete oder kontinuierliche Systeme. Abbildung 1 zeigt, welche Methoden heute angewendet werden.



Methode	Bereich	Preis
Lifting	Zustandsraum	unendl. Dim.
FR-Operator	Frequenzber.	speziell
PTF	Frequenzber.	allg. Strukturen

Abbildung 1: Methoden zur Behandlung von linearen Abtastsystemen

1. Wenn alle Eingangssignale des Systems abgetastet werden, dann kann das Verhalten in den Abtastzeitpunkten exakt durch ein zeitdiskretes LTI-Modell beschrieben werden. Man kann es im Zustandsraum, oder wie in Abbildung 1 gezeigt, mit Hilfe der z-Transformation im Bildbereich behandeln. Die modifizierte z-Transformation liefert dann Aussagen über das Verhalten zwischen den Abtastzeitpunkten, so daß man vollständig informiert ist (Pfeil links). Praktisch ist die Bedingung nur erfüllt, wenn man keine Störungen betrachten muß und die Führungsgröße direkt über den Rechner vorgegeben wird. Leider ist dieser Fall praktisch unbedeutend. Im guten Glauben, daß die Ergebnisse dennoch brauchbar sein werden,

wendet man das Verfahren auch dann an, wenn Störsignale direkt auf die kontinuierlichen Prozesse wirken. Daß man dabei böse Überraschungen erleben kann, ist z.B. in [3] gezeigt worden.

2. Für kleine Abtastzeiten ($T \to 0$) vernachlässigt man die Abtastung und löst das Problem mit den bekannten Verfahren für kontinuierliche Systeme (Pfeil rechts). Anschließend überträgt man die kontinuierliche Signalverknüpfung in einen Algorithmus für die digitalisierten Werte. Dabei ist von vornherein klar, daß es sich nur um ein Näherungsverfahren handelt. In der Vergangenheit wurde von verschiedenen Autoren nachgewiesen [2], daß der Grenzübergang $T \to 0$ oft nicht stetig erfolgt und dann falsche Resultate berechnet werden.

3. Ende der 80-er Jahre hat man sich den Abtastsystemen erneut zugewandt, weil die praktischen Ergebnisse der unter 1. und 2. genannten Vorgehensweisen unzureichend waren. Man hat nun versucht, den zeitvarianten Charakter der Abtastsysteme nicht mehr zu vernachlässigen. In der Tat wird durch das periodische Abtastelement das Gesamtsystem periodisch, auch wenn die einzelnen Bestandteile wie Prozeß oder Regelalgorithmus sich in ihren Systemeigenschaften nicht ändern. In der Tabelle zur Abbildung 1 sind drei Verfahren genannt [1, 5], [4], [8, 11], die in den Fällen anwenbar sind, wenn die oben genannten Methoden keine befriedigenden Ergebnisse liefern (mittlerer Pfeil).

Im folgenden wird der Reglerentwurf mit Hilfe der Parametrischen Übertragungsfunktion vorgestellt, der nach Meinung der Autoren das derzeit effektivste Werkzeug zur Behandlung von linearen Abtastsystemen darstellt. Die PTF basiert auf einer durchgängigen Behandlung der Signale und Systeme in kontinuierlicher Zeit. Dies unterscheidet die Methode von anderen Verfahren, die versuchen, den kontinuierlichen Charakter des Abtastsystems durch "Aufblähen der Dimension" des zeitdiskreten Modells zu berücksichtigen, wobei die physikalische Bedeutung verlorengeht und ein unhandliches mathematisches Kalkül erforderlich wird.

2 Eigenschaften der PTF

Die PTF wird zunächst für lineare Operatoren erklärt und danach für lineare Systeme. Das kontinuierliche Eingangssignal $x(t)$ sei über den linearen Operator L mit dem Ausgangssignal $y(t)$ verknüpft, wofür wir

$$y(t) = \mathrm{L}[x(t)] \tag{1}$$

schreiben. Mit $W(s,t)$ wird die Parametrische Übertragungsfunktion (PTF) des Operators L bezeichnet, die durch

$$W(s,t) = \mathrm{L}[\mathrm{e}^{st}]\mathrm{e}^{-st} \tag{2}$$

definiert ist mit der komplexen Variablen s und dem reellen Parameter t. Es kann gezeigt werden, daß die PTF eines zeitinvarianten Systems mit der gewöhnlichen, über die Laplace-Transformation erklärten Übertragungsfunktion $F(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ übereinstimmt, wenn $F(s)$ existiert.
Für periodische Operatoren mit der Periode T, d.h., wenn

$$\mathrm{L}[x(t+T)] = \mathrm{L}[x(t)] \tag{3}$$

gilt, wird die PTF periodisch in t

$$W(s,t) = W(s,t+T) \tag{4}$$

mit derselben Periode T.
Ein lineares System wird durch die Operatorengleichung

$$\mathrm{L}_1[y(t)] = \mathrm{L}_2[x(t)] \tag{5}$$

mit den linearen Operatoren $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$ definiert. Der Zusammenhang $x(t) \to y(t)$ ist dann im allgemeinen nichtlinear und wird nur unter ganz bestimmten Bedingungen an die Operatoren (Anfangswerte) linear. Mit dem Ansatz $x = \mathrm{e}^{st}$, $y = W(s,t)\mathrm{e}^{st}$ und der Periodizitätsbedingung $W(s,t+T) = W(s,t)$ ergibt sich für $W(s,t)$ ein Randwertproblem. Falls man eine Lösung findet, kann sie als PTF verwendet werden. Für viele praktische Abtaststrukturen läßt sich eine PTF finden.
Mit der PTF kann in ähnlicher Weise wie mit gewöhnlichen Übertragungsfunktionen gearbeitet werden. Für die Verknüpfung von Signalen und Systemen ist die diskrete Laplace-Transformation des Signals $f(t)$

$$\mathcal{D}_f(T,s,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(t+kT)\mathrm{e}^{-s(t+kT)} \tag{6}$$

und deren Umkehrung

$$f(t) = \frac{T}{2\pi \mathrm{j}} \int_{c-\mathrm{j}\omega/2}^{c+\mathrm{j}\omega/2} \mathcal{D}_f(T,s,t)\,\mathrm{d}s \tag{7}$$

von fundamentaler Bedeutung. Sie unterscheidet sich von der bekannten (modifizierten) z-Transformation dadurch, daß der Parameter t und das Signal $f(t)$ für $-\infty < t < \infty$ erklärt sind.
Wegen der Beziehung

$$\mathcal{D}_f(T,s,t+T) = \mathcal{D}_f(T,s,t)\mathrm{e}^{sT} \tag{8}$$

kann $\mathcal{D}_f(T,s,t)$ unter bestimmten Bedingungen auch durch die (zweiseitige) Laplace-Transformierte von $f(t)$

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \tag{9}$$

ausgedrückt werden. Wenn man

$$\mathcal{D}_F(T,s,t) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(s+k\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{(s+k\mathrm{j}\omega)t} \quad (10)$$

definiert, dann sieht man

$$\mathcal{D}_F(T,s,t) = \mathcal{D}_F(T,s+\mathrm{j}\omega,t) \quad (11)$$

sofort ein, aber man kann auch

$$\mathcal{D}_F(T,s,t) = \mathcal{D}_f(T,s,t) \quad (12)$$

und

$$F(s) = \int_0^T \mathcal{D}_f(T,s,t)\mathrm{e}^{st}\,\mathrm{d}t \quad (13)$$

zeigen.
Aus (13) ergibt sich die physikalische Interpretation von $F(s)$ als über die Periode T gemitteltes $\mathcal{D}_F(T,s,t)\mathrm{e}^{-st}$. Die Beziehung (12) ist Grundlage für die Berechnung von Systemreaktionen aus gegebenem Eingangssignal und Parametrischer Übertragungsfunktion. So ergibt sich beispielsweise

$$\mathcal{D}_y(T,s,t) = \mathcal{D}_{WX}(T,s,t) = \quad (14)$$

$$\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} W(s+k\mathrm{j}\omega,t)X(s+k\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{k\mathrm{j}\omega t}\,,$$

wenn der Zusammenhang zwischen $x(t)$ und $y(t)$ durch (1) mit der PTF (2) gegeben ist. Das Ausgangssignal wird dann durch (7) gewonnen.

Für die praktische Berechnung der PTF und damit der Systemreaktion ist wichtig, daß für parallel geschaltete Operatoren und Systeme die entsprechenden PTF's addiert werden. Für die Reihenschaltung gilt eine kompliziertere Formel, die sich jedoch auf das Produkt reduziert, wenn das erste Element zeitinvariant ist:

$$W(s,t) = W_1(s)W_2(s,t)\,. \quad (15)$$

Unter Ausnutzung dieser Tatsache kann die PTF komplizierterer Systeme aus den PTF's der Elementarbestandteile berechnet werden - das geschieht dann, wie im Falle der gewöhnlichen Laplace- oder z-Transformation, mit Hilfe von Tabellen. Die PTF kann nämlich in geschlossener Form angegeben werden, wenn das System zum Beispiel aus Abtaster mit Halteglied und gebrochenrationaler kontinuierlicher Übertragungsfunktion $F(s)$ nach Abbildung 2 besteht.

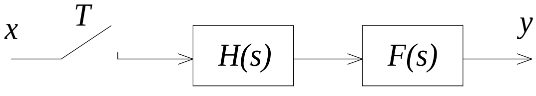


Abbildung 2. Abtaster mit Halteglied und kontinuierlichem Prozeß

Bei gegebener PTF und spektraler Leistungsdichte $S_x(s)$ des Eingangssignals läßt sich die Varianz des Ausgangssignal gemäß

$$v_y(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{j}}\int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} W(s,t)S_x(s)W(-s,t)\,\mathrm{d}s \quad (16)$$

berechnen, womit die Bedeutung der PTF für den Entwurf von Reglern und Filtern an stochastischen Prozessen klar wird. Die Varianz ist von der (festen) zeitlichen Verschiebung t zwischen Abtastzeitpunkt und Messung der Ausgangsgröße y abhängig. Da die Varianz des kontinuierlichen Signals $y(t)$ nicht nur zu den Abtastzeitpunkten bewertet werden soll, ist die mittlere Varianz

$$\bar{v}_y = \frac{1}{T}\int_0^T v_y(t)\,\mathrm{d}t \quad (17)$$

ein sinnvolles Kostenfunktional.

3 Entwurf optimaler Regler

Im Vortrag wird die PTF nur für den Entwurf von optimalen Reglern benutzt, obwohl sie universell für Abtastprobleme verwendet werden kann [10], [6].

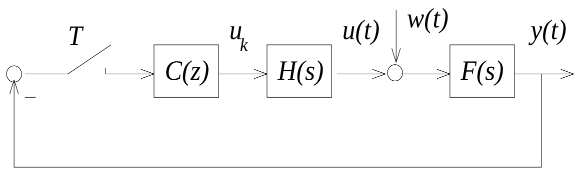


Abbildung 3. Abtastregelung

Exemplarisch soll das in Abbildung 3 dargestellte Problem betrachtet werden: Gegeben seien die Übertragungsfunktionen des Prozesses $F(s)$ und des Haltegliedes $H(s)$, die spektrale Leistungsdichte $S_w(s)$ des kontinuierlichen stationären und mittelwertfreien Rauschsignals $w(t)$ sowie die feste Abtastzeit T. Gesucht wird derjenige digitale lineare zeitinvariante Regler mit der Übertragungsfunktion $C(z)$, der den Regelkreis stabilisiert und die mittlere Varianz $\bar{v}_y$ des Ausgangssignals $y(t)$ minimiert.

Der Einfachheit halber werde angenommen, daß $F(s)$ nur einfache Pole besitzen möge. Dann wird von der Darstellung

$$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s-s_i} \quad (18)$$

ausgegangen. Die diskrete Laplace-Transformierte ergibt sich dann zu

$$\mathcal{D}_F(T,s,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i\mathrm{e}^{s_i t}}{1-\mathrm{e}^{-(s-s_i)T}}\,, \quad 0 \le t < T\,. \quad (19)$$

Die Funktion läßt sich mit Hilfe von (8) für alle Werte von t auf der reellen Achse berechnen. Wenn man ein Halteglied 0. Ordnung verwendet, kann auch die diskrete Laplace-Transformation der offenen Kette nach Abbildung 2 in geschlossener Form dargestellt werden. Man bekommt

$$\mathcal{D}_{FH}(T,s,t) = h(t) + \sum_{i=1}^{n} \frac{-c_i H(s_i) \mathrm{e}^{s_i t}}{1-\mathrm{e}^{-(s_i - s)T}} \qquad (20)$$

mit

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{s_i} \left[\mathrm{e}^{s_i t} - 1\right] .$$

Die PTF der offenen Kette kann wegen (15) durch einfache Produktbildung gewonnen werden, weil der Regler die zeitinvariante (nur von s, nicht von t abhängige) PTF

$$W_C(s) = C(z) \Bigg|_{z = \mathrm{e}^{sT}} \qquad (21)$$

besitzt. Insgesamt erhält man für die offene Kette die PTF

$$W_o(s,t) = W_C(s)\mathcal{D}_{FH}(T,s,t)\mathrm{e}^{-st} . \qquad (22)$$

Die PTF des geschlossenen Regelkreises besitzt die Gestalt

$$W_y(s) = F(s) \left[1 - \frac{W_C(s)\mathcal{D}_{FH}(T,s,t)\mathrm{e}^{-st}}{1+W_C(s)\mathcal{D}_{FH}(T,s,0)}\right] . \qquad (23)$$

Die Varianz

$$v_y(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{j}} \int_{-\mathrm{j}\infty}^{\mathrm{j}\infty} W_y(s,t) S_w(s) W_y(-s,t)\, \mathrm{d}s \qquad (24)$$

ist geschlossen auswertbar, wenn auch $S_w(s)$ eine gebrochenrationale Funktion ist, was für praktische Zwecke immer mit ausreichender Genauigkeit angenommen werden darf. Damit erhält man auch für die mittlere Varianz nach (17) einen geschlossenen Ausdruck. Dieses Funktional kann deshalb als Ausgangspunkt für einen Regler- oder Filterentwurf dienen. Dieser Reglerentwurf kann nach den bekannten Verfahren, zum Beispiel durch Faktorisierung und Polzuweisung erfolgen. Obwohl die Anwendung komplizierter als im Falle von LTI-Systemen ist, weil der zusätzliche Parameter t mitgeführt werden muß, lassen sich die Frequenzgangsverfahren prinzipiell von den LTI-Systemen auf Abtastsysteme übertragen.

Im Vortrag werden Ergebnisse diskutiert, die mit der PTF-Toolbox auf der Basis von MATLAB [7] gewonnen und mit SIMULINK simuliert wurden.

Literatur

[1] Bamieh, B.; Pearson, J.B.; Francis, B.A. and A. Tannenbaum
A lifting technique for linear periodic systems with application to sampled-data control. Systems & Control Letters, vol. 17, 79-88, 1991.

[2] Chen, T. and B.A. Francis
Optimal sampled-data control systems. Springer-Verlag, London, 1995.

[3] Feuer, A. and G.C. Goodwin
Generalized Sample-Hold Functions - Frequency Domain Analysis of Robustness, Sensitivity, and Intersampling Difficulties. IEEE Trans. AC-39, No. 5, 1042-1047, 1994.

[4] Hara, S.; Fujioka, H. and P.T. Kabamba
A Hybrid State-Space Approach to Sampled-Data Feedback Control. Linear Algebra and its Applications, 675-712, 1994.

[5] Khargonekar, P.P. and N. Sivashankar
H_2 optimal control for sampled-data systems. Systems & Control Letters, vol. 17, 425-436, 1992.

[6] Lampe, B.
Behandlung von Abtastsystemen in kontinuierlicher Zeit. Workshop des GMA-Ausschusses 1.4 "Theoretische Verfahren der Regelungstechnik", Interlaken (CH), 1995.

[7] Polyakov, K.Y.
PTF-Toolbox für MATLAB. Arbeitsversion, Universität Rostock, 1996.

[8] Rosenwasser, Y.N.
Theorie der linearen digitalen Regelung in kontinuierlicher Zeit (in Russisch). Moskau: Nauka, 1994.

[9] Rosenwasser, Y.N., Polyakow, K.Y., Lampe, B.P.
Entwurf optimaler digitaler Kursregler mit Parametrischen Übertragungsfunktionen. Automatisierungstechnik (at), angenommen für 1996.

[10] Rosenwasser, Y.N., Lampe, B.P.
Application of the Parametric Frequency Response to Identification of Sampled-data Systems. 2. Intern. Symposium on Mathematical Models in Automation and Robotics. Miedzyzdroje (PL), Sept. 1995.

[11] Rosenwasser, Ye.N.
Use of parametric transfer functions in analysing sampled-data systems in continuous time. Automation and Remote Control, Vol 50, N11, P1, pp 1501-1515 und Vol 51, N2, P1, pp 164-175, 1992.