Mathematische Modelle für thermische Vorgänge beim Schweißen

DISSERTATION

zur
Erlangung des akademischen Grades

Doktor-Ingenieur (Dr.-Ing.)

der Fakultät für Ingenieurwissenschaften
der Universität Rostock

vorgelegt von Uwe Richter
geboren am 16.10.1962 in Greifswald
aus Rostock

Gutachter: Prof. Dr. Ing.-habil. Christoph Reißmann, Rostock
Prof. Dr. Ing.-habil. Hans-Wolfgang Stolle, Rostock
Prof. Dr. Ing.-habil. Helmut Wohlfahrt, Braunschweig

verteidigt am 11.Juli 1996

AN
TI Mathematical modells for the thermal processes
in welding
AU Richter,Uwe
SO Rostock: Univ. Rostock, Fak. f. Ing.-wiss. , Diss. 99 S. (1995).
DT Dissertation
LA German
AB The dissertation deals with mathematical problems in welding. In the first chapter the derivation of the heat flow equation with its boundary conditions with respect to the welding process is considered. Then we discuss some analytical solutions, which leads to the theory from Rykalin. The strain and stress produced by the unsteady temperature field is modeled in the third chapter. Especially the material law for the plastic deformations emerging from the welding process is described. In the fourth chapter the variational problems for the temperature and deformation are derived. The last chapter shows the application of the Finite Element Method for the temperature fields and gives numerical results for some practical examples.
CC 35K05 Heat equation
73C25 Thermal stress problems
73E99 Plasticity
73E50 Time-dependent problems in plasticity
73V25 Variational methods
73V05 Finite element methods
UT heat conduction; change of temperature; quasistatic; strain; stress fields; stress-strain relations; linear elasticity; linear effects of temperature; Lame equations; existence; temperature dependent plastic deformation; mathematical algorithm; mikro-computing

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der benutzten Symbole

Allgemeine Bezeichnungen

x, y, z	Koordinatenrichtungen im Raum	[Einheit: m]
t	Zeit	[s]
n	Anzahl der räumlichen Dimensionen	
$\mathbb{R}^n$	n-dimensionaler reeller euklidischer Vektorraum	
Ω	Gebiet; betrachteter Körper; offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit stückweise glattem Rand	
$\partial\Omega$, S, S_i	Rand (Oberfläche) von Ω	
ν	äußerer Normaleneinheitsvektor	
div	Divergenz	
$\mathrm{grad}_{\underline{x}}$	Gradient bez. der räumlichen Koordinaten	
supp(f)	Träger der Funktion f	
mes(A)	Maß der Menge A	
L^P	Raum der p-fach integrierbaren Funktionen (4.1)	
L^1_{loc}	Raum der lokal integrierbaren Funktionen	
$W^{k,p}$	Sobolevraum (4.4)	
C^k	Raum der k -mal stetig differenzierbaren Funktionen	
C_0^∞	Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger	
$(\cdot,\cdot)_H$	Skalarprodukt im Hilbertraum H	
$\triangle$	Laplace–Operator	
l_i	Richtungskosinus mit der i-ten Koordinate $l_i = \cos(\nu, x_i)$	
$\emptyset$	leere Menge	
δ	Delta-Distribution	
δ_{ij}	Kronecker-Symbol (Einheitstensor)	

Temperaturfeld

$T(x, y, z, t)$	Temperatur im Punkt (x, y, z) zur Zeit t	[K]
$e(x, y, z, t)$	Energiedichte	
$c(x, y, z, t)$	spezifische Wärmekapazität	[$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{g \cdot K}}$]
$\varrho(x, y, z, t)$	Dichte	[$\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$]
$\lambda(x, y, z, t)$	Wärmeleitfähigkeitskoeffizient	[$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm \cdot K}}$]
a^2	Temperaturleitfähigkeit	[$\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}}$]
$Q(x, y, z, t)$	Leistungsdichte der Wärmequellen	[$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s \cdot cm}^3}$]
$\Phi(x, y, z, t)$	Wärmeflußvektor	[J]
$\alpha_T(x, y, z, t)$	Wärmeübergangskoeffizient	[$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{K}}$]
$T_0(x, y, z)$	Anfangstemperatur zum Zeitpunkt t_0	
$T_1(x, y, z, t)$	vorgegebene Temperatur auf dem Rand S_1	
$\Phi_2(x, y, z, t)$	vorgegebener Wärmestrom auf dem Rand S_2	
T_{um}	Umgebungstemperatur	
$E(x, y, z, t)$	Fundamentallösung des Operators der Wärmeleitung	

$H(t)$	Heaviside-Funktion, definiert durch (2.41)	
$\mathbf{A}, \mathbf{A}_k$	Differentialoperator (4.23)	
f, f_k	rechte Seite (4.23)	
$D(\mathbf{A})$	Definitionsbereich des Operators **A**	
$H_{_A}$	energetischer Raum (4.8)	
$F(T)$	Variationsfunktional der Wärmeleitung	

Plastizitätstheorie

$\sigma_{ij}(x, y, z, t)$	Spannungstensor	
$\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \ldots, \sigma_{11}, \ldots$	Komponenten des Spannungstensors	[Pa]
s_{ij}	Spannungsdeviator	
σ_0	mittlere Normalspannung	[Pa]
$\dot{\sigma}_{ij}$	Spannungsgeschwindigkeitstensor	
$\dot{s}_{ij}$	Spannungsdeviatorgeschwindigkeitstensor	
$\sigma_F(T), \tau_F(T)$	Fließspannung bei Druck bzw. reinem Schub	[Pa]
$\epsilon_{ij}(x, y, z, t)$	Deformationstensor	
$\epsilon_{xx}, \epsilon_{xy}, \ldots$	Komponenten des Deformationstensors	[1]
$\epsilon^e, \epsilon^p, \epsilon^T$	elastische, plastische bzw. thermische Deformation	
e_{ij}	Verzerrungsdeviator	
$\dot{\epsilon}_{ij}$	Deformationsgeschwindigkeitstensor	
ϵ_0	mittlere Dehnung	[1]
u, u_i	Verschiebungsvektor und seine Komponenten	[m]
X_x, X_y, X_z	Komponenten der Volumenkraft pro Volumeneinheit	
p_x, p_y, p_z	Komponenten der Oberflächenkraft pro Flä.-einheit	
f	Fließfunktion	
Λ	Koeffizient der plastischen Deformationen	
η	$\eta = 0$ entspricht Elastizität, $\eta = 1$ Plastizität	
$a_e(\cdot, \cdot)$	Bilinearform der elatischen Deformation	
$a_p(\cdot, \cdot)$	Bilinearform der plastischen Deformation	
$E(T)$	Elastizitätsmodul	[Pa]
$\mu(T)$	Poissonsche Querkontraktionszahl	[1]
$G(T)$	Schubmodul $\quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}$	[Pa]
$K(T)$	Kompressionsmodul $\quad K = \frac{1-2\mu}{E}$	[$\frac{1}{\mathrm{Pa}}$]
λ, ν	Lamésche Konstanten	[Pa]
$\alpha(T)$	thermischer Ausdehnungskoeffizient	[$\frac{1}{\mathrm{K}}$]

Schweißtechnik

U_s	Schweißspannung	[V]
I_s	Schweißstromstärke	[A]
v_s	Geschwindigkeit der Wärmequelle	[$\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{min}}$]
η	effektiver Wärmewirkungsgrad	[1]
P	Leistung	[W]
b	mittlerer Schweißbereich	[mm]
W	Energie, Wärmemenge	[J]
f	Frequenz bei Impulsschweißen	[Hz]
k	Konzentrationskoeffizient	[cm^{-2}]
$r_{_H}$	Radius des Erwärmungsflecks	[cm]
s	Blechdicke	[cm]
$\delta_{\ddot{u}}$	Übergangsblechdicke	[cm]

Numerik

Δt	Zeitschrittweite	[s]
$[C]$	Dämpfungsmatrix	

$[K]$	Steifigkeitsmatrix
$[N]$	Matrix der Formfunktionen
$[B]$	Gradientenmatrix
$\{T\}$	Vektor der Temperaturen in den Knotenpunkten
$\{F\}$	Vektor der Knotenkräfte

Problem- und Aufgabenstellung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Berechnung von Temperaturen, Spannungen und Deformationen beim Schweißen. Bei der Herstellung einer Schweißkonstruktion wird in das jeweilige Bauteil Wärmeenergie eingebracht. Da die Wärmeeinbringung auf den Ort der Schweißnaht konzentriert ist, ergibt sich ein inhomogenes Temperaturfeld, das Ursache für negative Beeinflussungen des Bauteils ist. Dazu zählen die Entstehung von elastischen und plastischen Schweißspannungen und -deformationen sowie irreversible Gefügeumwandlungen. Dies beeinflußt in hohem Maße die Festigkeit und Betriebssicherheit des geschweißten Bauteils.

Für diese Probleme stehen analytische Lösungen zur Verfügung. Diese beruhen aber auf vielen Schematisierungen, Vereinfachungen und empirischen Ergebnissen und sind nur begrenzt anwendbar. Um den Grad der Beeinflussung des Bauteils auch bei komplizierten Problemen der Bauteilgeometrie und Wärmeeinbringung kalkulieren zu können, sind numerische Verfahren notwendig. Bisher ist es so, daß die numerischen Verfahren so aufwendig sind, daß entsprechende Berechnungen nur auf Großrechnern durchgeführt werden können. Das Ziel dieser Arbeit ist die Untersuchung von Modellen, die die Berechnung des Temperaturfeldes und der Schweißeigenspannungen am Arbeitsplatz des Ingenieurs ermöglichen.

In dieser Arbeit soll deshalb ein mathematisches Modell für den Schweißprozeß aufgestellt werden, das anschließend für eine numerische Lösung mit Hilfe von Computern umgesetzt werden kann. Mathematische Modelle für den Schweißprozeß wurden bereits häufig untersucht. Im Literaturverzeichnis sind eine ganze Reihe von Veröffentlichungen zu diesem Thema aufgeführt (z. B. [7] , [12], [18] , [23] u.a.). Die meisten dieser Untersuchungen beschäftigen sich hauptsächlich mit technisch-technologischen Aspekten der mathematischen Modelle für das Schweißen. Ein Ziel dieser Arbeit ist es, diese Modelle vom mathematischen Standpunkt aus zu untersuchen. Damit soll deutlich werden, wann welche Modellierungen gerechtfertigt sind, und welche Konsequenzen für Existenz, Eindeutigkeit und Lösbarkeit die verschiedenen Annahmen und Vereinfachungen haben.

Im Kapitel 1 wird dargestellt, auf welchen Annahmen die Wärmeleitungsgleichung und die zusätzlichen Bedingungen für ihre Lösung beruhen. Einige Lösungen werden im nächsten Kapitel dargestellt. Von Schweißtechnologen und -konstrukteuren wird häufig für thermische Berechnungen die Quellentheorie von Rykalin benutzt (siehe [29] und [30]). Deshalb sollen im 2. Kapitel vor allem die analytischen Lösungen dargestellt werden, auf denen diese Theorie beruht. Für eine Reihe von Fällen reicht die Genauigkeit der Quellentheorie praktisch aus. Es kommt aber auch häufig vor, daß die Temperaturfelder genauer bestimmt werden müssen, um praktisch verwertbare Ergebnisse zu erhalten. Da diese Fälle häufig zu komplex sind, um noch analytische Lösungen berechnen zu können, muß das Temperaturfeld hier numerisch bestimmt werden. Ein sehr leistungsfähiges Verfahren, mit dem bereits gute Erfahrungen für solche Fälle gesammelt wurden, ist die Methode der Finiten Elemente (FEM). Andere Verfahren, die ebenfalls benutzt werden, sind die Finite-Differenzen-Methode (siehe z.B. [18]), Multigrid-Verfahren oder Randintegralgleichungsmethoden.

Das Temperaturfeld dient als Grundlage für die Bestimmung der Spannungen und Deformationen. Dazu werden zuerst im 3. Kapitel die theoretischen Grundlagen für die Elastizitäts- und Plastizitätstheorie zusammengestellt. Die Besonderheiten thermisch bedingter Spannungen und Deformationen werden hier ebenfalls erläutert.

Um die FEM anwenden zu können, werden im 4. Kapitel die Variationsfunktionale für die Wärmeleitung und die Thermospannungen hergeleitet. Einige Möglichkeiten zur numerischen Lösung des sich mit der FEM ergebenden Gleichungssystems werden dann im 5. Kapitel vorgestellt.

Mit der Berechnung der Spannungen, die nach dem Schweißen im Bauteil zurückbleiben, kann man jetzt untersuchen, ob der Spannungs- und Deformationszustand den notwendigen

Sicherheits- und Qualitätsanforderungen an das Bauteil entspricht. Außerdem können Parameter untersucht werden, die diesen Zustand im gewünschten Sinne beeinflussen. Zu solchen Parametern zählen zum Beispiel die Schweißfolge oder das Vor- und Nachwärmen. Praktisch wird häufig das Vorwärmen angewandt. Das Vorwärmen eines Werkstückes soll bewirken, daß sich der Bereich um die Schweißnaht langsamer abkühlt. Damit sollen negative Einflüsse vor allem auf aufhärtungsempfindliche Stähle verringert werden. Allerdings steigen durch das Vorwärmen die Kosten für das Schweißen sehr schnell an. Einen Ausweg dafür stellt das Nachwärmen dar. Für das Nachwärmen gibt es aber im Gegensatz zum Vorwärmen nur wenig praktische Erfahrungen. Das Programm und die theoretischen Vorraussetzungen dazu, die im Rahmen dieser Arbeit entwickelt wurden, sollen es daher auch ermöglichen, Testrechnungen für das Nachwärmen vorzunehmen. Das soll dazu beitragen, Richtlinien und Empfehlungen für das Nachwärmen aufzustellen, denn das Nachwärmen ist im Vergleich mit dem Vorwärmen das Verfahren, welches deutlich weniger Energie verbraucht.

Kapitel 1

Modellierung der Temperaturfelder beim Schweißen

Das Temperaturfeld ist die Belastungsgröße für das Enstehen der Spannungen und Deformationen. Deshalb wird die Modellierung der Temperaturfelder am Anfang dieser Arbeit erörtert. Durch die Modellierung soll deutlich werden, auf welchen Annahmen und Schematisierungen die erhaltenen Gleichungen beruhen. Durch die Wahl des technischen Modells, und daraus abgeleitet des mathematischen Modells, ist die Anwendbarkeit des konkreten Modells schon vorherbestimmt. Je mehr Faktoren und Einflüsse bei der Modellierung berücksichtigt werden, um so genauer werden natürlich auch die zu erwartenden Ergebnisse. Allerdings steigt mit wachsender Komplexität des Modells auch der analytische und numerische Aufwand zur Erlangung dieser Ergebnisse erheblich an — bis hin zu Modellen, die praktisch nicht mehr zu bearbeiten sind. Häufig ist es so, daß die realistischen Modelle zu kompliziert sind und die einfachen zu unrealistisch. Hier muß ein vernünftiger Kompromiß zwischen der gewünschten Genauigkeit und dem Aufwand zur Realisierung des Modells gefunden werden. Zu dieser Problematik siehe z.B. auch [19, Abschnitt 1.1] .

1.1 Herleitung der Wärmeleitungsgleichung

Eindimensionale Wärmeleitung

Zuerst soll in diesem Kapitel die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung (d.h. abhängig von einer Ortskoordinate) hergeleitet werden. Als Muster für die eindimensionale Wärmeleitung kann man die Wärmeleitung in einem dünnen Stab benutzen. In diesem Stab betrachten wir das Segment, das von den Flächen bei $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird (siehe Abbildung 1.1).

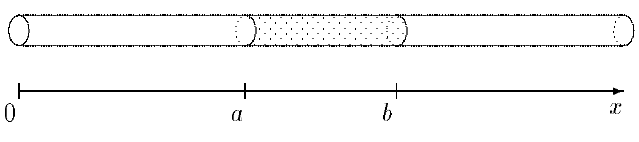


Abbildung 1.1: Stabsegment

Wenn wir mit $e(x,t)$ die Energiedichte an der Stelle x zum Zeitpunkt t bezeichnen, ist die Gesamtenergie im betrachteten Segment $\int_a^b e(x,t)\,dx$. Außerdem können wir für das Segment folgende Wortgleichung aufstellen:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Änderung der}\\ \text{Gesamtenergie}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Energie, die durch}\\ \text{den Rand fließt}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Energie, die in dem}\\ \text{Segment erzeugt wird}\end{array}}. \tag{1.1}$$

Die Änderung der Gesamtenergie ist dann $\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)\,dx$. Mit $\Phi(x,t)$ bezeichnen wir den Wärmeflußvektor. Am Rand $x = a$ strömt dann die Wärmemenge $\Phi(a,t)$ in das Segment hinein, am Rand $x = b$ die Wärmemenge $\Phi(b,t)$ hinaus. Die Energie, die insgesamt durch den Rand fließt, ist also $\Phi(a,t) - \Phi(b,t)$. Die Energie, die in dem Segment erzeugt wird, ist $\int_a^b Q(x,t)\,dx$. Dabei bezeichnet $Q(x,t)$ die „Erzeugungsdichte" der Energie. Zu jedem Zeitpunkt gilt also für das betrachtete Segment:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)\,dx = \Phi(a,t) - \Phi(b,t) + \int_a^b Q(x,t)\,dx \quad . \tag{1.2}$$

Falls a und b zeitlich konstant sind und $e(x,t)$ stetig ist, gilt:

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e(x,t)\,dx = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)\,dx \quad .$$

Für stetig differenzierbare Funktionen $\Phi(x,t)$ gilt jetzt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\Phi(a,t) - \Phi(b,t) = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,t)\,dx \quad .$$

Damit erhalten wir für Gleichung (1.2) :

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} e(x,t)\,dx = -\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,t)\,dx + \int_a^b Q(x,t)\,dx$$

bzw.:

$$\int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} e(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,t) - Q(x,t)\right)\,dx = 0 \quad .$$

Dieses Integral soll für beliebige Ränder a und b verschwinden, also muß auch der Integrand verschwinden:

$$\frac{\partial}{\partial t} e(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\Phi(x,t) = Q(x,t) \quad . \tag{1.3}$$

Da wir aber Körper im allgemeinen durch ihre Temperatur und nicht durch ihre Energie beschreiben, drücken wir die Energie und den Energiefluß durch die Temperatur aus. Dabei sei T die Temperatur, V das Volumen, c die spezifische Wärmekapazität und ϱ die Dichte des Körpers. Dann gilt:

$$e(x,t)\cdot V = c(x,t)\cdot \varrho(x,t)\cdot T(x,t)\cdot V \quad \text{bzw.} \quad e(x,t) = c(x,t)\cdot\varrho(x,t)\cdot T(x,t).$$

Für den Wärmefluß gilt jetzt das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung. Dieses besagt, daß der Wärmefluß um so größer ist, je größer das Temperaturgefälle zwischen benachbarten Regionen ist und daß der Wärmefluß von den wärmeren zu den kälteren Regionen gerichtet ist. Wenn wir mit λ_x die Wärmeleitfähigkeit in x-Richtung bezeichnen, gilt:

$$\Phi(x,t) = -\lambda_x(x,t)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}.$$

Mit diesen beiden Beziehungen erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(x,t)\cdot\varrho(x,t)\cdot T\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x(x,t)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q(x,t) \quad . \tag{1.4}$$

Genau genommen sind c, ϱ und λ_x Funktionen der Temperatur, so daß man (1.4) eigentlich in der Form (1.5) schreiben müßte:

$$c(T)\cdot\varrho(T)\cdot\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x(T)\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right) = Q(x,t) \quad . \tag{1.5}$$

Die Gleichung (1.5) ist eine nichtlineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung. Falls man die Koeffizienten als nur vom Ort und der Zeit, aber nicht von der Temperatur abhängig ansetzt, ergibt sich eine lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit variablen Koeffizienten (Gleichung (1.4)). Für konstante Koeffizienten ergibt sich die Differentialgleichung (Dgl.):

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda_x}{c \cdot \varrho} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{c \cdot \varrho} Q(x,t) \quad . \tag{1.6}$$

Aus den verschiedenen Modellierungen des Verhaltens der Koeffizienten ergeben sich damit die Differentialgleichungen (1.4), (1.5) und (1.6). Diese drei Dgln. haben zwar dieselbe Struktur, es ergeben sich aber große Unterschiede in der analytischen und numerischen Lösbarkeit der entsprechenden Modelle. Darauf wird dann in den entsprechenden Abschnitten näher eingegangen. Um diese drei Modelle genau zu unterscheiden, bezeichnen wir (1.6) als Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten, (1.4) als Wärmeleitungsgleichung mit variablen Koeffizienten und (1.5) als nichtlineare Wärmeleitungsgleichung.

Mehrdimensionale Wärmeleitung

Auf die gleiche Art und Weise wie für den Stab, erhalten wir auch die Wärmeleitungsgleichung für eine Platte (zweidimensional) bzw. für einen massiven Körper (dreidimensional). Im folgenden soll jetzt die Wärmeleitungsgleichung allgemein, d.h., für n Dimensionen hergeleitet werden. Wir betrachten jetzt also ein n-dimensionales Gebiet Ω im $\mathbb{R}^n$ und gehen analog zum eindimensionalen Fall wieder von der Wortgleichung (1.1) aus:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Änderung der}\\ \text{Gesamtenergie}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{Energie, die durch}\\ \text{den Rand fließt}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{Energie, die in dem}\\ \text{Segment erzeugt wird}\end{array}} \quad . \tag{1.1}$$

Die Gesamtenergie ist jetzt

$$\int_{\Omega}\!\cdots\!\int c(\underline{x}) \cdot \varrho(\underline{x}) \cdot T(\underline{x},t)\, d\underline{x}$$

und die Änderung der Gesamtenergie wieder

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\!\cdots\!\int c(\underline{x}) \cdot \varrho(\underline{x}) \cdot T(\underline{x},t)\, d\underline{x} \quad .$$

Dabei ist $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Die Energie, die im Gebiet Ω erzeugt wird, ist

$$\int_{\Omega}\!\cdots\!\int Q(\underline{x},t)\, d\underline{x} \quad .$$

Jedem Punkt $\underline{x}$ des Gebietes ordnen wir wieder den Wärmeflußvektor $\Phi(\underline{x},t)$ zu. Der Betrag des Wärmeflußvektors entspricht dabei der Größe des Wärmeflusses. Am Rand $\partial\Omega$ des Gebietes Ω können wir jetzt den Wärmeflußvektor in eine Normalenkomponente und eine Tangentialkomponente aufspalten (siehe Abbildung 1.2). Durch den Rand fließt nur die Normalenkomponente

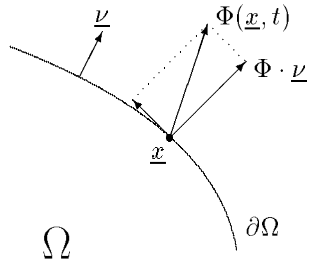


Abbildung 1.2: Wärmeflußvektor

von $\Phi(\underline{x},t)$, also die Energie $-\Phi(\underline{x},t)\cdot\nu$ im Punkt $\underline{x}$ bzw. die Energie $\int_{\partial\Omega}\!\cdot\!\int \Phi(\underline{x},t)\cdot\nu\, d(\partial\Omega)$ durch den gesamten Rand. Damit folgt also:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int c(\underline{x})\cdot\varrho(\underline{x})\cdot T(\underline{x},t)\,d\underline{x} = -\int_{\partial\Omega}\!\!\cdots\!\!\int \Phi(\underline{x},t)\cdot\nu\,d(\partial\Omega) + \int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int Q(\underline{x},t)\,d\underline{x} \quad . \tag{1.7}$$

Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int c(\underline{x})\cdot\varrho(\underline{x})\cdot T(\underline{x},t)\,d\underline{x} = -\int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int \operatorname{div}\Phi(\underline{x},t)\cdot\nu\,d\underline{x} + \int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int Q(\underline{x},t)\,d\underline{x} \quad .$$

Für ein festes Volumen kann man jetzt die Ableitung nach der Zeit mit der Integration vertauschen und die Integrale zusammenfassen:

$$\int_{\Omega}\!\!\cdots\!\!\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(\underline{x})\cdot\varrho(\underline{x})\cdot T(\underline{x},t)\Big) + \operatorname{div}\Phi(\underline{x},t) - Q(\underline{x},t)\right]\,d\underline{x} = 0 \quad .$$

Das gilt für beliebige Gebiete Ω , also muß gelten:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(\underline{x})\cdot\varrho(\underline{x})\cdot T(\underline{x},t)\Big) + \operatorname{div}\Phi(\underline{x},t) - Q(\underline{x},t) = 0 \quad . \tag{1.8}$$

Das Fouriersche Gesetz der Wärmeleitung lautet jetzt im $\mathbb{R}^n$, wenn wir mit $\bullet$ die komponentenweise Multiplikation zweier Vektoren bezeichnen:

$$\Phi(\underline{x},t) = -\underline{\lambda}\bullet\operatorname{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t) \qquad \underline{\lambda} = (\lambda_{x_1},\lambda_{x_2},\ldots,\lambda_{x_n}) \quad . \tag{1.9}$$

Durch Einsetzen dieses Gesetzes in (1.8) ergibt sich damit:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(\underline{x})\cdot\varrho(\underline{x})\cdot T(\underline{x},t)\Big) - \operatorname{div}\Big(\underline{\lambda}\bullet\operatorname{grad}_{\underline{x}}T(\underline{x},t)\Big) = Q(\underline{x},t) \quad . \tag{1.10}$$

Diese Differentialgleichung ist die Wärmeleitungsgleichung mit variablen Koeffizienten. In der Literatur wird sie häufig auch als Diffusionsgleichung bezeichnet. Die Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten hat dann die Gestalt:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{c\cdot\varrho}\cdot\Delta_{\underline{x}}T(\underline{x},t) = \frac{1}{c\cdot\varrho}Q(\underline{x},t) \quad . \tag{1.11}$$

Für z. B. drei Raumkoordinaten x, y, z sieht (1.11) ausführlich geschrieben folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} c\cdot\varrho\frac{\partial}{\partial t}T(x,y,z,t) - \lambda_x\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(x,y,z,t) - \lambda_y\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}T(x,y,z,t) \\ -\lambda_z\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(x,y,z,t) = Q(x,y,z,t) \quad . \end{aligned}$$

Zusatzbemerkungen

Die Herleitung der Wärmeleitungsgleichung beruht auf dem in der Theoretischen Physik sehr verbreitetem Prinzip der Bilanzgleichungen. Die Wortgleichung (1.1) ist nämlich nichts anderes als die Energiebilanz für den betrachteten Körper. Die so erhaltene Wärmeleitungsgleichung modelliert die Wärmeausbreitung bereits relativ genau. Es muß aber auch gesagt werden, daß dieses Modell nicht fehlerlos ist. Im Abschnitt (2.2) wird die Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung berechnet (Formel (2.43)). Wie man an der Fundamentallösung sehen wird, breitet sich die Wärme mit unendlicher Geschwindigkeit aus. Das entspricht aber nicht der Realität. Eine genauere Modellierung der Wärmeausbreitung erreicht man z. B. durch die Transportgleichung, die diese Tatsache berücksichtigt (siehe z. B. [41, Seite 41 ff.]):

$$\frac{1}{v}\frac{\partial\psi}{\partial t} + (\mathrm{s},\operatorname{grad}\psi) + \alpha\psi = \frac{\alpha h}{4\pi}\int_{S_1}\psi(x,\mathrm{s}',t)\,d\mathrm{s}' + Q \quad . \tag{1.12}$$

In dieser Integro-Differentialgleichung bezeichnet ψ den Teilchenstrom, der sich mit der Geschwindigkeit v in die Richtung s bewegt, $\frac{1}{\alpha}$ ist ihre mittlere freie Weglänge und h ist ein Parameter, der von der Wahrscheinlichkeit abhängt, mit der die Teilchen bei Zusammenstößen elastisch reflektiert bzw. eingefangen werden. Diese Gleichung ist allerdings wesentlich schwieriger zu lösen.

Für quasistationäre Temperaturfelder wird häufig auch eine andere Modellierung der Wärmeausbreitung benutzt. Dabei geht man von der eigentlichen Wärmeleitungsgleichung aus. Diesmal wird die Wärmeausbreitung aber nicht in einem festen Koordinatensystem betrachtet, sondern das Koordinatensystem wird direkt in die bewegliche Wärmequelle gelegt. Bei dieser Betrachtungsweise interessiert man sich für das sich einstellende quasistationäre Temperaturfeld. Bei konstanter Leistung und Geschwindigkeit der Wärmequelle verändert sich das Temperaturfeld in dem bewegten Koordinatensystem nur noch geringfügig. Die zeitliche Änderung des Temperaturfeldes kann deshalb vernachlässigt werden. Mit den entsprechenden Transformationen kommt man bei dieser Betrachtungsweise zu der Differentialgleichung (hier für zwei Raumdimensionen):

$$\lambda_x \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} T(x,y) + \lambda_y \cdot \frac{\partial^2}{\partial y^2} T(x,y) - v_x \cdot \frac{\partial}{\partial x} T(x,y) - v_y \cdot \frac{\partial}{\partial y} T(x,y) = -Q(x,y) \quad . \qquad (1.13)$$

Hier sind v_x und v_y die Geschwindigkeiten der Wärmequelle in x-Richtung bzw. in y-Richtung. Diese Differentialgleichung wird in der Literatur als Wärmeleitungsgleichung mit Stofftransport bezeichnet. Sie ist eine elliptische Differentialgleichung. Dadurch entfallen bei der numerischen Lösung die Schwierigkeiten, die bei parabolischen Gleichungen auftreten. Es treten jetzt aber erste Ableitungen im Differentialoperator auf, die für die Konvergenz der numerischen Lösung besondere Techniken erfordern. Um Konvergenz in den numerischen Verfahren zu erhalten, kann man z. B. mit upstream-Elementen arbeiten. Dieses Modell für die Wärmeleitung wurde z. B. in [23] untersucht.

Als weitere Einschränkung des obigen Modells muß gesagt werden, daß die Wärmeleitungsgleichung nur für feste Körper gilt. Beim Schweißen tritt aber mit dem Schweißbad ein flüssiger Bereich auf. Dadurch erhält man ein Mehr-Phasen-System mit Randbedingungen an der nicht bekannten Grenze zwischen dem Grundkörper und dem Schweißbad. Mathematisch handelt es sich damit um ein freies Randwertproblem, das als Stefan-Problem bezeichnet wird. In dieser Arbeit soll im weiteren der Unterschied zwischen den einzelnen Phasen vernachlässigt werden. Die verschiedenen thermischen Eigenschaften des Grundwerkstoffs und des Schweißbades sollen aber annähernd durch geeignete Materialwerte berücksichtigt werden (siehe Abschnitt 1.4). Es gibt aber auch Modellierungen und darauf beruhende Berechnungen, bei denen die hydrodynamische Strömung im Schweißbad berücksichtigt wird. In [42] wird beispielsweise die Schmelzbadausbildung in Abhängigkeit von dem Lichtbogen, der Gravitation und der Oberflächenspannung untersucht und ein Algorithmus zur Berechnung des Schmelzbades unter stationären Bedingungen vorgestellt.

1.2 Anfangs- und Randbedingungen

Zur vollständigen Beschreibung der Temperaturverteilung und Wärmeleitung in einem Körper ist es erforderlich, außer der die Wärmeleitung beschreibenden Differentialgleichung noch den Anfangszustand und die Vorgänge am Rand des Bereiches, in dem die Wärmeleitung abläuft, vorzugeben. Das hängt mathematisch mit der Mehrdeutigkeit der Lösungen von Differentialgleichungen zusammen. Die zusätzlichen Bedingungen heißen dann Anfangs– und Randbedingungen. Für die Wärmeleitungsgleichung gibt es dabei zwei Möglichkeiten, auf mathematisch sinnvolle Weise zusätzliche Bedingungen zu stellen. Dadurch ergeben sich die beiden folgenden Aufgabentypen:

Die Randanfangswertaufgabe, bei der eine Anfangsbedingung und Randbedingungen für ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ vorgegeben sind.

Die Cauchysche Aufgabe, bei der nur eine Anfangsbedingung vorgegeben ist. Das Gebiet Ω ist hier der gesamte Raum $\mathbb{R}^n$.

Wir gehen jetzt genauer auf die einzelnen Bedingungen ein. Durch die Anfangsbedingung wird die Temperatur zu einem Startzeitpunkt $t = 0$ vorgegeben:

$$T(\underline{x}, 0) = T_0(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in \Omega \qquad . \qquad (1.14)$$

Die Lösung $T(\underline{x},t)$ wird in Ω für $t > 0$ gesucht. Durch die Randbedingungen werden die verschiedenen Mechanismen des Wärmeaustausches über den Rand des Gebietes Ω modelliert. Dafür gibt es folgende Möglichkeiten:

1. Randbedingung für vorgegebene Temperaturen

$$T(\underline{x},t) = T_1(\underline{x},t) \qquad \underline{x} \in S_1 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \qquad . \tag{1.15}$$

   Diese Randbedingung heißt Dirichletsche Randbedingung oder auch 1. Randbedingung. Durch diese Bedingung wird modelliert, daß auf dem Rand bzw. einem Teil des Randes feste Temperaturen vorgegeben werden. Das tritt z. B. auf, wenn bei einem Bauteil, das geschweißt wird, eine Seite mit Wasser gekühlt wird.

2. Randbedingung für vorgegebene Wärmeströme

$$\Phi(\underline{x},t) = \Phi_2(\underline{x},t) \qquad \underline{x} \in S_2 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \quad .$$

   Durch diese Bedingung wird der Wärmestrom durch den Rand S_2 vorgegeben. Durch Anwendung des Fourierschen Gesetzes (1.9) und mit $\Phi_2 = -\lambda \cdot T_2$ ergibt sich daraus eine Bedingung an die Temperatur:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot \mathrm{grad}_{\underline{x}} T(\underline{x},t) \cdot \nu &= \lambda \cdot T_2(\underline{x},t) \\ \frac{\partial}{\partial \nu} T(\underline{x},t) &= T_2(\underline{x},t) \qquad \underline{x} \in S_2 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.16}$$

   Das heißt also, auf dem Rand wird die Ableitung der Temperatur in Normalenrichtung vorgegeben. Durch diese Randbedingung wird z. B. beim Schweißen der durch den Lichtbogen bedingte Wärmeübergang in das Bauteil modelliert. Die Bedingung (1.16) wird auch Neumannsche oder 2. Randbedingung genannt.

3. Randbedingung für Konvektion
   Der durch Konvektion an einer Oberfläche bedingte Wärmestrom hängt von der Differenz zwischen der Temperatur an der Oberfläche und der Umgebungstemperatur (T_{um}) ab. Physikalisch kann dieser Zusammenhang durch eine lineare Beziehung modelliert werden. Diese Beziehung ist das Newtonsche Gesetz :

$$\Phi(\underline{x},t) \cdot \nu = \alpha_{_T} \cdot \big(T(\underline{x},t) - T_{um}(\underline{x},t)\big) \qquad \underline{x} \in S_3 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \quad .$$

   Die in dieser Beziehung auftretende Proportionalitätskonstante $\alpha_{_T}$ wird als Wärmeübergangskoeffizient bezeichnet. Mit dem Fourierschen Gesetz ergibt sich daraus:

$$\lambda \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} T(\underline{x},t) + \alpha_{_T} \cdot \big(T(\underline{x},t) - T_{um}(\underline{x},t)\big) = 0 \qquad \underline{x} \in S_3\,, t > 0 \quad . \tag{1.17}$$

   Für nichtisotropes Material hat diese Randbedingung die Form

$$\sum_{i=1}^{n} \left[\lambda_{x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} T(\underline{x},t) \cdot l_i\right] + \alpha_{_T} \cdot \big(T(\underline{x},t) - T_{um}(\underline{x},t)\big) = 0 \qquad \underline{x} \in S_3\,, t > 0 \quad , \tag{1.18}$$

   wobei die l_i die Kosinuswerte der Winkel zwischen der i-ten Koordinatenachse und dem Normalenvektor sind (Richtungskosinus). Die Bedingung (1.17) bzw. (1.18) heißt auch Newtonsche oder 3. Randbedingung.

4. Symmetriebedingung
   Häufig braucht bei symmetrischen Bauteilen, symmetrischer Anordnung der Wärmequellen und symmetrischen Randbedingungen nur ein Teil des eigentlichen Körpers betrachtet zu werden. Im Teilkörper tritt jetzt aber die Symmetrieebene (bzw. bei ebenen Problemen die Symmetrieachse) als neuer Rand auf. Da das Temperaturfeld zur Symmetrieebene symmetrisch sein muß, findet kein Wärmefluß durch diesen Rand statt. Analog zur 2. Randbedingung ergibt sich dann für die Symmetrieebene als Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} T(\underline{x},t) = 0 \qquad \underline{x} \in S_4 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \quad . \tag{1.19}$$

   Das heißt, für den aus Symmetrie entstehenden Rand gilt die homogene Neumannsche Randbedingung als Spezialfall von Beziehung (1.16).

5. Kontaktbedingung

$$\Phi_l(\underline{x},t) = \Phi_r(\underline{x},t) \qquad \underline{x} \in S_5 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \qquad . \tag{1.20}$$

Wenn zwei Bauteile aus unterschiedlichen Materialien zusammenstoßen, tritt an der Kontaktfläche ein bestimmter Wärmestrom auf. Daraus ergibt sich wieder eine Bedingung an die Temperatur:

$$\begin{aligned} \lambda_l \cdot \operatorname{grad}_{\underline{x}} T(\underline{x},t) \cdot \nu &= -\lambda_r \cdot \operatorname{grad}_{\underline{x}} T(\underline{x},t) \cdot \nu \\ \lambda_l \frac{\partial}{\partial \nu} T(\underline{x},t) &= -\lambda_r \frac{\partial}{\partial \nu} T(\underline{x},t) \qquad \underline{x} \in S_5 \subset \partial\Omega\,, t > 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.21}$$

Damit die jetzt konkret geforderten Randbedingungen sinnvoll sind, muß gelten, daß sich die Ränder S_1 bis S_4 nicht überlappen und außerdem den gesamten Rand ergeben, d. h. $\partial\Omega = S_1 \uplus S_2 \uplus S_3 \uplus S_4$ und $S_i \cap S_j = \emptyset$ für $i \neq j$. Weiterhin muß wegen der Stetigkeit des Temperaturfeldes $T(\underline{x},t)$ die Verträglichkeitsbedingung

$$\lim_{t\to 0} T_1(\underline{x},t) = T_0(\underline{x}) \qquad \underline{x} \in S_1 \tag{1.22}$$

erfüllt sein.

1.3 Modellierung der Wärmequellen

Eine wichtige Rolle bei der Modellierung der thermischen Vorgänge beim Schweißen spielen die Wärmequellen. Beim Schweißen tritt hier die Besonderheit auf, daß die Wärmeeinbringung örtlich stark konzentriert ist. Das muß bei der Modellbildung berücksichtigt werden. In der Literatur werden verschiedene Modellierungen vorgeschlagen.

1. Wärmequelle in einem Element
   Bei dieser Modellierung wird zuerst die Energiemenge bestimmt, die dem Bauteil durch die Schweißwärmequelle in der Zeit $\triangle t$ zugeführt wird. Genau genommen wird also die thermische Leistung bestimmt. Dann wird in einem kleinen Bereich $\Omega_Q \subset \Omega$ des Körpers eine Wärmequelle angebracht, die genau diese Leistung besitzt. Mit anderen Worten, die Erzeugungsdichte $Q(\underline{x},t)$ wird in Ω_Q konstant gewählt, so daß die Gesamtleistung $P = \int_{\Omega_Q} Q\, d\Omega_Q$ gleich der thermischen Leistung wird. Außerhalb von Ω_Q wird Q gleich Null gesetzt. In der numerischen Umsetzung entspricht Ω_Q dann einem Finiten Element, z. B. einem Dreieck, Quader oder Tetraeder, in dem dann Q konstant ist. Die Wärmeeinbringung erfolgt in dieser Modellierung also durch innere Wärmequellen.

2. Wärmezufuhr über den Rand
   Praktisch ist die obige Modellierung nur für einige Schweißverfahren (z. B. Widerstandspunktschweißen, Reibschweißen oder Strahlverfahren) richtig. Bei den meisten Schweißverfahren wird die Energie aber außerhalb des Bauteils erzeugt und gelangt dann erst durch Wärmestrahlung und Konvektion in das Bauteil. Das kann mit Hilfe der Neumannschen Randbedingung modelliert werden. Dazu wird wieder die effektive Leistung $P(t)$ bestimmt und anschließend der auf dem Rand S_2 vorgegebene Wärmeflußvektor $\Phi_2(\underline{x},t)$ geeignet gewählt.

   (a) punktförmige Wärmezufuhr
   In diesem Fall wird die Energie in einem Punkt $\underline{x}_0 \in S_2$ zugeführt. Diese Modellierung entspricht den Punktkräften in der Mechanik. Der Wärmeflußvektor wäre in diesem Fall

   $$\Phi_2(\underline{x},t) = -P(t) \cdot \delta(\underline{x} - \underline{x}_0) \cdot \underline{\nu}(\underline{x}). \tag{1.23}$$

   Dabei ist δ die Delta-Distribution.

   (b) normalverteilte Wärmezufuhr
   Genauer ist es, die Energie nicht in einem Punkt, sondern über einen entsprechenden Teil des Randes S_2 zugeführt zu modellieren. Experimente haben gezeigt, daß die Wärmeflußdichte auf der Oberfläche mit recht guter Näherung normalverteilt (bzw. gaußverteilt) ist. Wenn r der Abstand eines Punktes auf der Oberfläche vom Zentrum

der Wärmequelle ist, kann man also für den Wärmeflußvektor folgenden Ansatz machen:

$$\Phi_2(r,t) = \Phi(0,t) \cdot e^{-k \cdot r^2} \quad . \tag{1.24}$$

Die Größe k ist dabei der Konzentrationskoeffizient, der jeweils vom konkreten Schweißverfahren abhängig ist. $\Phi(0,t)$ ist der Wärmestrom im Zentrum.

Hier soll im weiteren die Variante 2b weiter untersucht werden. In der Gleichung (1.24) tauchen zwei Parameter auf, nämlich k und $\Phi(0,t)$. Diese sind theoretischer Natur. Deshalb muß versucht werden, sie durch technisch relevantere Parameter auszudrücken. Dazu betrachten wir die Oberfläche einer Platte. Die Platte soll so groß sein, daß der Rand keinen Wärmeeinfluß mehr hat. Mathematisch können wir die Platte dann als unendlich groß annehmen. Die effektive Leistung $P(t)$ der Wärmequelle kann jetzt folgendermaßen bestimmt werden:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_2(x,y,t)\, dx\, dy \\ &= \int_{0}^{\infty} \Phi_2(r,t) \cdot 2\pi r\, dr \\ &= 2\pi\Phi(0,t) \cdot \int_{0}^{\infty} e^{-k \cdot r^2} r dr \\ &= \frac{\pi}{k} \cdot \Phi(0,t) \quad . \end{aligned}$$

Andererseits ist die effektive Leistung P bei elektrischen Schweißverfahren einfach durch die Beziehung $P = \eta \cdot U_s \cdot I_s$ zu bestimmen. In dieser Beziehung sind U_s die Schweißspannung, I_s die Schweißstromstärke und η ist der effektive Wärmewirkungsgrad. Damit erhält man:

$$\Phi(0,t) = \eta \cdot U_s \cdot I_s \cdot \frac{k}{\pi} \quad . \tag{1.25}$$

Jetzt muß noch der Parameter k ersetzt werden. Dazu führen wir als neuen Parameter den Radius des Erwärmungsflecks r_H ein. r_H sei der Abstand vom Zentrum der Wärmequelle, bei dem der Wärmestrom nur noch 5 Prozent des maximalen Wärmestroms beträgt. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \Phi_2(r_H,t) &= 0.05 \cdot \Phi(0,t) \\ \Phi(0,t) \cdot e^{-k \cdot r_H^2} &= 0.05 \cdot \Phi(0,t) \\ e^{-k \cdot r_H^2} &= 0.05 \\ k \cdot r_H^2 &= 2.995732\ldots \\ k &\cong \frac{3.0}{r_H^2} \qquad \text{bzw.} \\ r_H &\cong \sqrt{\frac{3.0}{k}} \quad . \end{aligned} \tag{1.26}$$

Verfahren	η in 1	k in cm^{-2}	r_H in cm
Unterpulver	$0.80 \ldots 0.95$	6.0	0.7
E-Schweißen	$0.70 \ldots 0.85$	1.3	1.5
MAG(CO_2)	$0.58 \ldots 0.72$	1.3	1.5
WIG-Schweißen	$0.50 \ldots 0.60$	-	-
MIG-Schweißen	$0.70 \ldots 0.80$	-	-
Gasschweißen	$0.10 \ldots 0.20$	$0.2 \ldots 0.4$	$2.7 \ldots 3.9$
Laser	$0.50 \ldots 0.70$	≈ 300	≈ 0.1

Tabelle 1.1: Parameter für verschiedene Schweißverfahren

Brenngas	Flammenleistung in $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{cm^2 s}}$	Heizwert in $\frac{\mathrm{cal}}{\mathrm{l}}$	Heizwert in $\frac{\mathrm{kJ}}{\mathrm{l}}$
Acetylen	44.8	11470 ... 14100	48.0 ... 59.0
Stadtgas	12.7	-	-
Wasserstoff	14.0	2570 ... 3050	10.7 ... 12.8
Propan	10.7	22358 ... 24320	93.6 ... 101.8
Erdgas	12.0	-	-
Leuchtgas	-	3730 ... 4280	15.6 ... 17.9

Tabelle 1.2: Parameter für verschiedene Brenngase

Mit (1.25) und (1.26) kann jetzt (1.24) für elektrische Schweißverfahren in der Form

$$\Phi_2(r,t) = \frac{3 \cdot \eta \cdot U \cdot I}{\pi \cdot r_H^2} \cdot \exp\left\{-3 \cdot \left(\frac{r}{r_H}\right)^2\right\} \tag{1.27}$$

geschrieben werden. In (1.27) treten jetzt nur noch technisch relevante Parameter auf, so daß damit der Wärmestrom berechnet werden kann.

Etwas schwieriger wird es, die Gleichung (1.24) für Gasschweißverfahren anzupassen. Der Konzentrationskoeffizient k kann wieder auf dieselbe Art und Weise ersetzt werden. Die Gesamtleistung eines Schweißbrenners hängt nun vom Verbrauch an Brenngas und dem Heizwert des Brenngases ab. Für den Brenngasverbrauch wird in der Literatur folgende Faustregel angegeben (siehe z. B. [39, Seite 164]) :

$$\text{Brenngasverbrauch} = (\text{mittlerer Schweißbereich in mm}) \cdot 100\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{h}} \quad .$$

Für einen Schweißbrenner, bei dem auf der Mischdüse 6 ... 9 als Schweißbereich angegeben ist, wäre der mittlere Schweißbereich also 7.5mm und der Gasverbrauch damit $750\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{h}}$ an Brenngas. Aus dem Gasverbrauch, dem Heizwert des Brenngases und dem Wärmewirkungsgrad kann dann die effektive Wärmeleistung der Wärmequelle berechnet werden:

$$P = \eta \cdot (\text{mittlerer Schweißbereich}) \cdot 100\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{h \cdot mm}} \cdot \text{Heizwert} \quad . \tag{1.28}$$

Damit ergibt sich mit der Leistung P aus (1.28) für die Berechnung des Wärmestroms aus einer Gaswärmequelle die Beziehung:

$$\Phi_2(r,t) = \frac{3 \cdot P}{\pi \cdot r_H^2} \cdot \exp\left\{-3 \cdot \left(\frac{r}{r_H}\right)^2\right\} \quad . \tag{1.29}$$

Das eigentliche Problem dieser Beziehung liegt aber in der Bestimmung des Wirkungsgrades η. Da η betragsmäßig sehr klein ist, kann eine kleine Änderung von η zu großen Änderungen des Wärmestromes führen. Wie man aus Tabelle 1.1 sieht, ist der obere Wert für Gasschweißverfahren doppelt so groß wie der untere Wert. In der Literatur werden für η sogar Werte zwischen 0.01 und 0.5 angegeben. Bei einem eigenen Experiment, das im Schweißlabor des Fachbereichs Maschinenbau der Universität Rostock stattfand, ergab sich für Nachwärmen durch Gasschweißen z. B. ein Wirkungsgrad von 0.43 . Dabei wurde der Wirkungsgrad ermittelt, indem die mit einem Wasserkalorimeter gemessene Zunahme der Enthalpie des Werkstücks mit der durch den Schweißbrenner erzeugten Wärmemenge verglichen wurde. Diese Ausführungen hier sollen verdeutlichen, daß auf die Wärmeeinbringung beim Gasschweißen viele Größen einen starken Einfluß ausüben. Da man diese praktisch nicht alle berücksichtigen kann, erreicht man beim Gasschweißen geringere Genauigkeiten als beispielsweise beim Unterpulverschweißen.

Das obige Modell der Wärmestromdichte liefert aber nicht in allen Fällen eine gute Näherung. In [33] wird die Verteilung der Wärmestromdichte als Funktion der Blechdicke für das Laserschweißen untersucht. Hier ergibt sich ungefähr ein linear abnehmender Verlauf des Wärmestroms.

Mit der Modellierung der Wärmestromdichte mit der Gauß'schen Wahrscheinlichkeitskurve ergibt sich eine gute Übereinstimmung mit der tatsächlichen Wärmestromdichte. Das wird durch die numerischen Berechnungen in Abschnitt 5.2 bestätigt. Abbildung 1.3 zeigt die Verteilung der Wärmestromdichte für verschiedene Schweißverfahren.

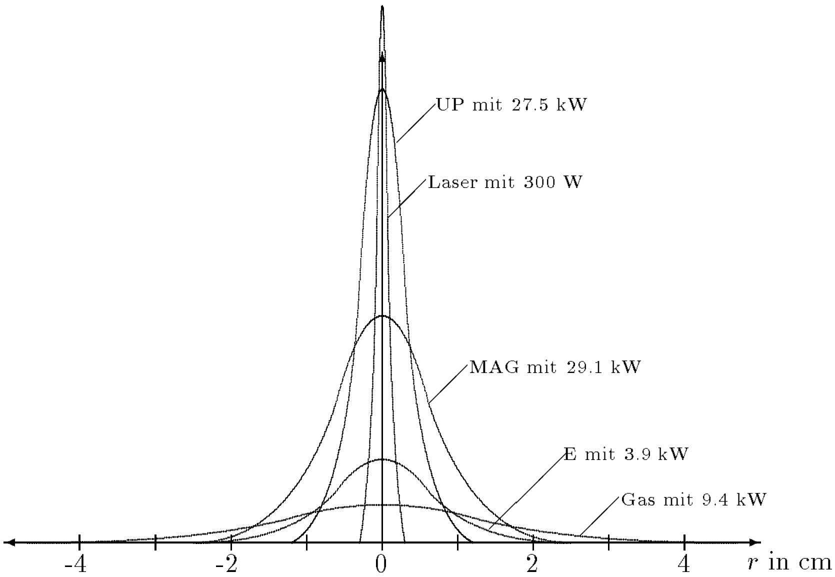


Abbildung 1.3: Wärmestromdichten verschiedener Schweißverfahren

1.4 Materialwerte und ihre Temperaturabhängigkeit

Im Abschnitt 1.1 wurde bereits ausgeführt, daß die mathematischen Eigenschaften der Wärmeleitungsgleichung wesentlich davon abhängen, ob die Koeffizienten konstant, variabel oder nichtlinear gewählt werden. Praktisch ist es natürlich so, daß z. B. für die Wärmeleitfähigkeit $\lambda = \lambda(x, y, z, t, T)$ gilt. Allerdings ist physikalisch betrachtet die Abhängigkeit vom Ort und von der Zeit so klein, daß für ein gegebenes Material $\lambda = \lambda(T)$ gilt. Diese Temperaturabhängigkeit wurde für Stähle ausführlich in [26] untersucht. Es gibt nun viele Möglichkeiten, die Abhängigkeit zu erfassen, z. B. graphisch oder als Wertetabelle. In [26] wurden mit Hilfe der Regressionsanalyse Polynome in T für die Temperaturabhängigkeit ermittelt. Diese Art der Bestimmung der Temperaturabhängigkeit ist besonders dann günstig, wenn diese Beziehungen im Computer weiter verwendet werden sollen. Durch die Approximation der Abhängigkeit durch Polynome werden allerdings solche Effekte wie Singularitäten der Abhängigkeit in Umwandlungspunkten vernachlässigt. Für Untersuchungen von Temperaturfeldern sind jetzt die Dichte, die spezifische Wärmekapazität, die Wärmeleitung und die Temperaturleitfähigkeit wichtig. Bei der Untersuchung in [26] zeigte sich, daß die spezifische Wärmekapazität von Stählen innerhalb einer Stahlgruppe relativ gering von der konkreten chemischen Zusammensetzung abhängt und durch

$$\begin{aligned} c_u(T) &= 424\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} + 0.539\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^2}T - 0.00097\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^3}T^2 + 0.00000091\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^4}T^3 \\ c_a(T) &= 450\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}} + 0.280\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^2}T - 0.000291\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^3}T^2 + 0.000000134\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{K}^4}T^3 \quad . \end{aligned} \tag{1.30}$$

angenähert werden kann. Dabei sind c_u die spezifische Wärmekapazität für unlegierte und niedriglegierte Stähle und c_a die spezifische Wärmekapazität für austenitische Cr-Ni und Ni-Cr-Stähle. Ein anderes Verhalten zeigt die Dichte von Stählen. Für sie ergibt sich, daß sie nur sehr gering von der Temperatur, dafür aber mehr vom Cr-Gehalt abhängt:

$$\varrho = 7.84\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} \qquad \text{für un- und niedriglegierte Stähle}$$

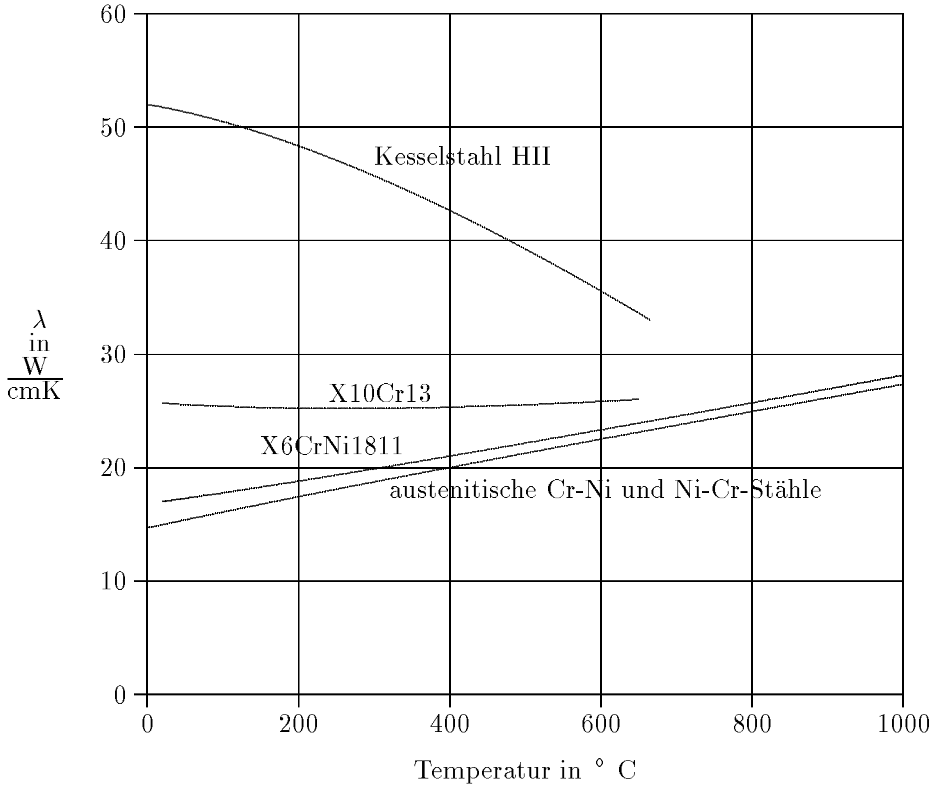


Abbildung 1.4: Wärmeleitfähigkeit

$$
\begin{aligned}
\varrho &= 7.82\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} - 0.008\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,\%Cr && \text{für Stähle ohne Al} \\
\varrho &= 7.74\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3} - 0.012\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}\,\%Cr && \text{für Stähle mit 1 \% Al} \quad .
\end{aligned} \tag{1.31}
$$

Typische Verläufe der Wärmeleitfähigkeit zeigt Abbildung 1.4. Hier ergibt sich im Unterschied zur spezifischen Wärmekapazität und zur Dichte eine deutlich größere Abhängigkeit vom Legierungsgehalt. Als Beispiele seien hier die Regressionsgleichungen

$$
\begin{aligned}
\lambda_K(T) &= 52.1\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} - 0.0159\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^2}T - 0.0000186\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^3}T^2 \\
\lambda_X(T) &= 25.8\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} - 0.00360\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^2}T - 0.0000065\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^3}T^2 \\
\lambda_a(T) &= 14.6\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}} - 0.0127\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{K}^2}T
\end{aligned} \tag{1.32}
$$

angeführt. Hier stehen λ_K für den Kesselstahl H II , λ_X für den Stahl X10Cr13 und λ_a für austenitische Cr-Ni und Ni-Cr-Stähle. Da die Temperaturleitfähigkeit mit den anderen drei Materialwerten durch die Beziehung $a^2 = \frac{\lambda}{c\cdot\varrho}$ verknüpft ist, ergibt sich hier ebenfalls eine große Abhängigkeit vom Legierungsgehalt:

$$
\begin{aligned}
a_K^2(T) &= 0.149\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}} - 0.000174\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}}T + 0.0000000415\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}^2}T^2 \\
a_X^2(T) &= 0.046\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}} - 0.0000044\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}}T + 0.0000000152\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}^2}T^2 \\
a_a^2(T) &= 0.039\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}} + 0.0000152\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{s}\cdot\mathrm{K}}T \quad .
\end{aligned} \tag{1.33}
$$

Dabei steht a_X für den Stahl X6CrNi1811. Allerdings muß hier darauf hingewiesen werden, daß die obigen Regressionsgleichungen für den Temperaturbereich von 0 °C bis maximal 1000 °C aufgestellt wurden. Für höhere Temperaturen finden sich in der Literatur nur wenige Untersuchungen. Deshalb wurden eigene Testrechnungen durchgeführt, um zu untersuchen, wie die

Wärmeleitfähigkeit bei hohen Temperaturen geeignet modelliert werden kann. Vor allem für den Bereich von 1000 °C bis 1500 °C sind diese Untersuchungen für die Berechnung der Temperaturfelder sehr wichtig, da sich die Stähle in diesem Bereich noch im festen Aggregatzustand befinden. Ab 1500 °C werden sie dann aufgeschmolzen und es bildet sich das Schweißbad. Im Schweißbad kommt es nun zu einer starken Bewegung und Durchmischung des Stahls. Hier ist die Modellierung durch die Wärmeleitungsgleichung praktisch nicht mehr richtig. Um den erheblich höheren Aufwand für ein mathematisches Modell, das die Effekte des Schweißbades entsprechend berücksichtigt, zu umgehen, kann man folgendermaßen vorgehen: Das Schweißbad wird ebenfalls durch die Wärmeleitung modelliert, aber im Bereich des Schweißbades wird die Wärmeleitfähigkeit schrittweise stark erhöht. Die im Rahmen dieser Arbeit für diese Modellierung durchgeführten Testrechnungen haben gezeigt, daß eine Erhöhung auf ungefähr das 100-fache günstig ist. Das heißt, für 1500 °C wird die richtige Wärmeleitfähigkeit benutzt, ab ungefähr 2000 °C eine um den Faktor 100 erhöhte Wärmeleitfähigkeit und dazwischen wird die Wärmeleitfähigkeit stetig approximiert. Dieses Verfahren mag etwas willkürlich erscheinen. Testrechnungen haben aber gezeigt, daß dadurch die Wärmeverteilung im Schweißbad mit sehr geringem Aufwand bereits recht gut angenähert wird und die damit erreichte Genauigkeit für die meisten praktischen Zwecke völlig ausreichend ist.

1.5 Ebene Temperaturfelder

Reale Wärmeausbreitungsprozesse spielen sich im dreidimensionalen Raum und in der Zeit ab. Häufig kann man diese Probleme relativ gut bereits mit weniger Raumdimensionen modellieren. Dadurch kann vor allem der Aufwand für numerische Berechnungen erheblich gesenkt werden. Es muß aber jeweils geprüft werden, ob die sich ergebenden Genauigkeitsverluste vertretbar sind und die Verringerung des Rechenaufwands rechtfertigen. So kann man eindimensionale Probleme (in stabförmigen Werkstücken) und zweidimensionale Probleme (in Platten) betrachten. In einer Platte ist eine zweidimensionale (oder ebene) Modellierung der Wärmeausbreitung gerechtfertigt, wenn die Patte dünn genug ist (siehe Abbildung 1.5). Das hat zur Folge, daß die Temperaturunterschiede über die Plattendicke relativ gering sind ($\frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$). Für die Modellierung kann man diese Unterschiede dann vernachlässigen und für die Temperaturen

$$T(x,y,z,t) \cong T(x,y,t) \tag{1.34}$$

ansetzen. Wann die Platte dünn genug ist, wird zu einem späteren Zeitpunkt noch näher untersucht (siehe Seite 31).

Falls ein massiver Körper mit einer leistungsstarken und schnellen Wärmequelle geschweißt wird, kann man häufig die Wärmeausbreitung auch als eben modellieren. Untersuchungen der Wärmeausbreitung in der Literatur zeigen nämlich, daß die Wärmeableitung hauptsächlich senkrecht zur Schweißrichtung erfolgt. Diese Aussage ist um so zutreffender, je schneller sich die Wärmequelle bewegt. In Abbildung 1.6 bewegt sich die Wärmequelle entlang der x - Achse. Wenn man jetzt dünne Scheiben betrachtet, die senkrecht auf der x - Achse stehen, findet zwischen diesen Scheiben nur ein geringfügiger Wärmeaustausch statt, der für die Modellierung vernachlässigt werden kann. Da eine schnelle Wärmequelle vorausgesetzt wurde, breitet sich

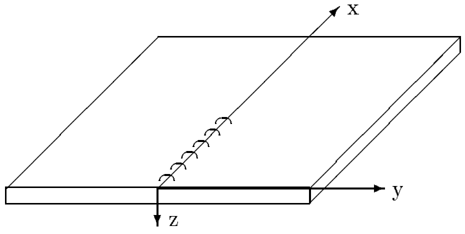


Abbildung 1.5: dünne Platte

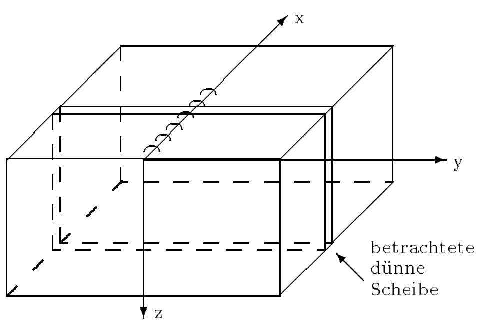


Abbildung 1.6: massiver Körper

die Wärme nur in geringem Maße vor der Quelle aus. Das braucht aber für die Modellierung nicht berücksichtigt zu werden. Damit beginnt die Wärmeausbreitung in jeder Scheibe erst dann, wenn die Wärmequelle die Scheibe passiert. Für die Temperaturen ergibt sich also die Beziehung

$$T(x,y,z,t) = T(y,z,t-\frac{x}{v_s}) = T(y,z,\tilde{t}\,)\,, \tag{1.35}$$

mit der die Wärmeausbreitung im massiven Werkstück auf die in einer Platte zurückgeführt wird. Die Größe v_s in dieser Beziehung ist die Schweißgeschwindigkeit. Bei der numerischen Berechnung der ebenen Temperaturfelder ergeben sich später nur geringe Unterschiede für beide Modelle (z. B. müssen die Randbedingungen anders gewählt werden). Bei der Berechnung der aus dem Temperaturfeld resultierenden Spannungen und Deformationen ist der Sachverhalt komplizierter. Es sei hier schon erwähnt, daß man im ersten Fall als Modell den ebenen Spannungszustand und im zweiten Fall den ebenen Deformationszustand benutzen muß.

Jetzt müssen noch die Randbedingungen entsprechend umgeformt werden. Bei der dünnen Platte haben wir ja Randbedingungen auf der Grund- und Deckfläche. Nach der ebenen Modellierung geht dieser Rand in das Körperinnere über und die Normalenableitung (z. B. für Neumannrandbedingungen) in $z-$Richtung existiert nicht mehr. Deshalb müssen diese Randbedingungen vorher durch geeignete Transformationen (z. B. mit dem ersten Greenschen Integralsatz)

$$\int_{\partial\Omega}\!\!\cdots\!\int \frac{\partial T}{\partial \nu}\, d\partial\Omega = \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int \triangle T\, d\Omega \tag{1.36}$$

in Terme für die rechte Seite der Differentialgleichung umgeformt werden.

Die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\Big(c\cdot\varrho\cdot T\Big) - \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T) &= Q && \text{in } \Omega\\
T &= T_D && \text{auf } S_1\\
\lambda\frac{\partial}{\partial \nu}T &= -\Phi && \text{auf } S_2\\
\lambda\cdot\frac{\partial}{\partial \nu}T &= -\alpha_{_T}\cdot(T-T_{um}) && \text{auf } S_3
\end{aligned}$$

beschreiben jetzt die Wärmeausbreitung beim Schweißen. Für dieses Problem werden im Kapitel 2 einige analytische Lösungen hergeleitet und in Kapitel 4.3 wird mit Variationsmethoden eine Form abgeleitet, die numerisch bearbeitet werden kann.

Kapitel 2

Einige analytische Lösungen für die Wärmeleitungsgleichung

Analytische Lösungen lassen sich nur in den einfachsten Fällen berechnen. Einfach heißt dabei, daß sowohl die Koeffizienten konstant sein müssen, als auch das Gebiet, in dem die Lösung bestimmt werden soll, von einfacher Gestalt sein muß. In diesem Kapitel gehen wir deshalb immer von der Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten aus.

2.1 Das RAWP für den Stab

Wir betrachten einen endlich langen wärmeleitenden Stab. In diesem Stab sind die Anfangstemperaturverteilung und die Art des Wärmeaustausches am Rand (z. B. die Dirichletsche Randbedingung) gegeben. In der Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten (1.6) setzen wir noch $\frac{\lambda}{c \cdot \rho} = a^2$. Das Koordinatensystem ordnen wir so an, daß das eine Ende des Stabes bei $x = 0$ und das andere bei $x = l$ liegt. Damit ergibt sich für Dirichletbedingungen folgendes Problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = Q(x,t) \qquad 0 < x < l,\, t > 0 \\ T(0,t) = T_1(t) \qquad T(l,t) = \hat{T}_1(t) \qquad t > 0 \\ T(x,0) = T_0(x) \qquad 0 < x < l \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Für dieses Problem wird die Lösung mit Hilfe der Fouriermethode konstruiert. Das ist die klassische Methode zur Bestimmung der Lösung, die auf Fourier zurückgeht. Nach [41] kann man dabei folgendermaßen vorgehen: Wir setzen voraus, daß die Funktionen T_0 und Q in eine Fourierreihe entwickelbar sind. Für die Lösung $T(x,t)$ des homogenen Problems machen wir den Ansatz $T(x,t) = X(x) \cdot \theta(t)$. Das heißt, wir suchen eine Lösung, die als Produkt einer ortsabhängigen und einer zeitabhängigen Funktion darstellbar ist. Durch Einsetzen des Ansatzes in die homogene Dgl. erhalten wir:

$$X(x)\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) - a^2\theta(t)\frac{\partial^2}{\partial x^2}X(x) = 0 \quad . \tag{2.2}$$

Nach Division durch $a^2 X(x)\theta(t)$ ergibt sich:

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{\theta'(t)}{\theta(t)} = \pm\beta^2 \quad . \tag{2.3}$$

In der Gleichung (2.3) steht auf der einen Seite eine Funktion, die nur vom Ort, aber nicht von der Zeit und auf der anderen Seite eine Funktion, die nur von der Zeit, aber nicht vom Ort abhängt. Offenbar kann diese Gleichheit nur gelten, wenn die entsprechenden Terme konstant sind $(= \pm\beta^2)$. Durch Einsetzen des Ansatzes in die Randbedingungen erhalten wir:

$$T_1(t) = X(0)\theta(t) = 0 \quad \text{und} \quad \hat{T}_1(t) = X(l)\theta(t) = 0 \quad . \tag{2.4}$$

Da wir eine nichttriviale Lösung $T(x,t)$, also $\theta(t) \not\equiv 0$ suchen, folgt $X(0) = X(l) = 0$. Damit ergibt sich für die Funktion $X(x)$ folgendes Randeigenwertproblem:

$$X''(x) \mp \beta^2 X(x) = 0 \tag{2.5}$$

$$X(0) = X(l) = 0 \quad . \tag{2.6}$$

Bei negativem Vorzeichen vor β^2 in (2.5) ergibt sich als allgemeine Lösung der Dgl.

$$X(x) = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x} .$$

Aus $X(0) = X(l) = 0$ folgt dann für die Konstanten $C_1 = C_2 = 0$, d. h. es ist nur die triviale Lösung möglich. Deshalb ist in (2.5) nur das positive Vorzeichen vor β^2 sinnvoll. Als allgemeine Lösung dieser Dgl. erhalten wir:

$$\begin{aligned} X(x) &= C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) && (2.7)\\ \Rightarrow X(0) &= C_1 = 0 && (2.8)\\ \Rightarrow X(l) &= C_2 \sin(\beta l) = 0 \quad . && (2.9) \end{aligned}$$

Da bereits $C_1 = 0$ gilt, suchen wir Lösungen, bei denen C_2 verschieden von Null ist. Es gilt $\sin(\varphi) = 0$ genau dann, wenn $\varphi = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Daraus folgt, daß $\beta_k = \frac{k\pi}{l} \quad k = 1, 2, \ldots$ die einzigen möglichen Werte für β sind. Die Zahlen β_k heißen Eigenwerte des Randeigenwertproblems. Zu diesen Eigenwerten gehören die folgenden Eigenfunktionen:

$$X_k(x) = C_k \sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right) \qquad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{2.10}$$

Diese Funktionen sind jetzt im Hilbertraum $L^2(0,l)$ orthogonal. Dabei ist $L^2(0,l)$ der Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen mit dem Skalarprodukt

$$(f_1, f_2) = \int_0^l f_1 \cdot f_2 \, dx \quad . \tag{2.11}$$

Die Koeffizienten C_k bestimmen wir jetzt so, daß die Funktionen $X_k(x)$ sogar orthonormiert werden:

$$\begin{aligned} \|X_k(x)\| &= \sqrt{(X_k, X_k)} \\ &= \Big(\int_0^l C_k^2 \cdot \sin^2(\frac{k\pi x}{l}) \, dx \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_k \Big(\frac{l}{2}\Big)^{\frac{1}{2}} \\ \|X_k(x)\| = 1 \qquad \Rightarrow \qquad & C_k = \sqrt{\frac{2}{l}} \quad k = 1, 2, \ldots \quad . && (2.12) \end{aligned}$$

Damit haben wir die in $L^2(0,l)$ orthonormierten Eigenfunktionen $X_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\frac{k\pi x}{l})$ erhalten. Jetzt machen wir für die Lösung von (2.1) den Superpositionsansatz:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \theta_k(t) \quad . \tag{2.13}$$

Die Funktionen $\theta_k(t)$ müssen nun so bestimmt werden, daß die Dgl. und die Anfangsbedingung erfüllt sind. Durch Einsetzen des Ansatzes ergibt sich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \theta_k'(t) - a^2 \sum_{k=1}^{\infty} X_k''(x) \theta_k(t) = Q(x,t) \tag{2.14}$$

$$\text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) \theta_k(0) = T_0(x) \quad . \tag{2.15}$$

In der Dgl. wurden Summation und Differentiation vertauscht, für die sich ergebende Lösung muß dann bewiesen werden, daß diese Vertauschung möglich ist. Wegen der Beziehung

$$X_k''(x) = -\beta_k^2 X_k(x)$$

folgt jetzt weiter:

$$\sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\theta_k'(t) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 X_k(x)\theta_k(t) = Q(x,t) \quad . \tag{2.16}$$

Diese Gleichung multiplizieren wir jetzt im Raum $L^2(0,l)$ skalar mit den Funktionen $X_n(x)$ für $n = 1, 2, \ldots$ und erhalten unter der Vorraussetzung, daß Summation und Integration vertauschbar sind:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l X_k(x)X_n(x)\,dx\theta_k'(t) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \int_0^l X_k(x)X_n(x)\,dx\theta_k(t) = \int_0^l Q(x,t)X_n(x)\,dx \quad . \tag{2.17}$$

Da die Funktionen $X_n(x)$ orthonormiert sind, folgt damit weiter:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \delta_{nk}\theta_k'(t) + a^2 \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 \delta_{nk}\theta_k(t) = \int_0^l Q(x,t)X_n(x)\,dx \tag{2.18}$$

$$\theta_n'(t) + a^2\beta_n^2\theta_n(t) = \int_0^l Q(x,t)X_n(x)\,dx \qquad n = 1, 2, \ldots \quad . \tag{2.19}$$

Es ergeben sich also gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Funktionen $\theta_n(t)$. Die Lösungen haben die Gestalt:

$$\theta_n(t) = \alpha_n e^{-a^2\beta_n^2 t} + \int_0^t \int_0^l Q(\xi,\tau)X_n(\xi)\,d\xi\, e^{a^2\beta_n^2(\tau-t)}\,d\tau \tag{2.20}$$

$$\Rightarrow \theta_n(0) = \alpha_n \quad . \tag{2.21}$$

Jetzt soll noch die Anfangsbedingung erfüllt werden, daraus ergibt sich eine Bedingung an die Konstanten α_n :

$$T_0(x) = T(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\theta_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k X_k(x) \quad . \tag{2.22}$$

T_0 sollte in eine Fourierreihe entwickelbar sein:

$$T_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^l T_0(\xi)X_k(\xi)\,d\xi \cdot X_k(x) \tag{2.23}$$

$$\Rightarrow \theta_k(0) = \alpha_k = \int_0^l T_0(\xi)X_k(\xi)\,d\xi \quad . \tag{2.24}$$

Damit haben wir folgende formale Lösung erhalten:

$$T(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x)\Big(\alpha_k e^{-a^2\beta_k^2 t} + \int_0^t e^{a^2\beta_k^2(\tau-t)} \int_0^l Q(\xi,\tau)X_k(\xi)\,d\xi\,d\tau\Big) \tag{2.25}$$

mit

$$\alpha_k = \int_0^l T_0(\xi)X_k(\xi)\,d\xi = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l T_0(\xi)\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\,d\xi \tag{2.26}$$

$$X_k(\xi) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right) \quad \text{und} \quad \beta_k^2 = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 \quad . \tag{2.27}$$

Für andere Randbedingungen erhält man natürlich andere Eigenwerte und Eigenfunktionen sowie andere Koeffizienten α_k . Der Lösungsweg ist aber derselbe. Jetzt müssen noch die inhomogenen Randwerte mit berücksichtigt werden. Dazu wird eine Funktion $\tilde{T}(x,t)$ konstruiert, die die Randbedingungen erfüllt. Für die Randbedingungen aus (2.1) kann man z. B.

die Funktion $\tilde{T}(x,t) = (\frac{l-x}{l})T_1(t) + (\frac{x}{l})\hat{T}_1(t)$ wählen. Jetzt bildet man die neue Funktion $\vartheta(x,t) = T(x,t) - \tilde{T}(x,t)$. Diese Funktion wird jetzt in (2.1) eingesetzt und es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vartheta(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \vartheta(x,t)}{\partial x^2} = Q(x,t) - \left(\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} \right) \qquad & 0 < x < l,\, t > 0 \\ \vartheta(0,t) = 0 \qquad \vartheta(l,t) = 0 \qquad & t > 0 \\ \vartheta(x,0) = T_0(x) - \tilde{T}(x,0) \qquad & 0 < x < l \quad . \end{aligned} \tag{2.28}$$

(2.28) ist jetzt ein Problem mit homogenen Randbedingungen, das nach (2.25) gelöst wird. Die Lösung von (2.1) ergibt sich dann durch $T(x,t) = \vartheta(x,t) + \tilde{T}(x,t)$.

Bemerkungen

1. Die Vertauschbarkeit von Summation und Differentiation in der Lösung kann man zeigen, indem man mit dem Wurzelkriterium beweist, daß die Reihe gleichmäßig konvergiert. Aus der gleichmäßigen Konvergenz folgt die Vertauschbarkeit und damit ist die formale Lösung eine echte Lösung.

2. Das Problem mit inhomogenen Randbedingungen kann auf das mit homogenen Randbedingungen zurückgeführt werden. Dazu konstruiert man eine Funktion $g(x,t)$, die die inhomogenen Randbedingungen erfüllt. Die neue Funktion $S(x,t) := T(x,t) - g(x,t)$ wird dann in die Dgl. , die Rand- und Anfangsbedingungen eingesetzt. Es ergibt sich für S dann ein Problem mit homogenen Randbedingungen und neuer rechter Seite und neuer Anfangsbedingung.

2.2 Die Fundamentallösung für das Cauchyproblem

Das Cauchyproblem kann folgendermaßen formuliert werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(\underline{x},t)}{\partial t} - a^2 \triangle_{\underline{x}} T(\underline{x},t) = Q(\underline{x},t) \qquad & \underline{x} \in \mathbb{R}^n,\, t > 0 \\ T(\underline{x},0) = T_0(\underline{x}) \qquad & \underline{x} \in \mathbb{R}^n \quad . \end{aligned} \tag{2.29}$$

Die Lösung dieses Problems kann mit Hilfe einer speziellen Funktion dargestellt werden. Diese Funktion ist im klassischen Sinn keine Funktion, sondern eine verallgemeinerte Funktion bzw. eine Distribution. Die Ausführungen in diesem Abschnitt sind deshalb auch im Sinne der Distributionentheorie zu verstehen. Eine Einführung in die Theorie der Schwartzschen Distributionen findet man beispielsweise in [41, Seite 66 ff.] Diese spezielle Distribution ist die Fundamentallösung. Zuerst soll die Fundamentallösung bestimmt werden.

Berechnung der Fundamentallösung

Die Fundamentallösung wird definiert als Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial E}{\partial t} - a^2 E = \delta(\underline{x},t) \quad . \tag{2.30}$$

Um diese Lösung zu berechnen, werden wir zuerst auf die Ortskoordinaten die Fouriertransformation $F_{\underline{x}}$ anwenden. Danach lösen wir die sich ergebende gewöhnliche Differentialgleichung. Diese Lösung muß dann wieder zurücktransformiert werden, um die Fundamentallösung zu erhalten. Die Fouriertransformierte $\tilde{f}$ für eine Funktion f erhält man durch:

$$\tilde{f}(\underline{\xi}) = F_{\underline{x}}[f(\underline{x})](\underline{\xi}) = \int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\int f(\underline{x}) \cdot e^{-i\sum_{k=1}^n x_k \xi_k}\, d\underline{x} \tag{2.31}$$

$$g(\underline{x}) = F_{\underline{\xi}}^{-1}[\tilde{g}(\underline{\xi})](\underline{x}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n}\!\!\int \tilde{g}(\underline{\xi}) \cdot e^{i\sum_{k=1}^n x_k \xi_k}\, d\underline{\xi} \quad . \tag{2.32}$$

Wir benutzen jetzt folgende Rechenregeln für die Fouriertransformation, die hier nur angegeben werden sollen (diese Regeln werden z. B. in [41] hergeleitet):

$$\begin{aligned} F_{\underline{x}}[f+g] &= F_{\underline{x}}[f] + F_{\underline{x}}[g] && (2.33)\\ F_{\underline{x}}\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right] &= \frac{\partial}{\partial t} F_{\underline{x}}[E] = \frac{\partial}{\partial t}\tilde{E}(\underline{\xi}, t) && (2.34)\\ F_{\underline{x}}[\triangle_{\underline{x}} E] &= -|\underline{\xi}|^2 F_{\underline{x}}[E] = -|\underline{\xi}|^2 \tilde{E}(\underline{\xi}, t) && (2.35)\\ F_{\underline{x}}[\delta(\underline{x}, t)] &= F_{\underline{x}}[\delta(\underline{x}) \cdot \delta(t)] = \delta(t) F_{\underline{x}}[\delta(\underline{x})] = \delta(t) \cdot 1 \quad . && (2.36) \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Fouriertransformation auf beide Seiten der Gleichung (2.30) ergibt sich

$$F_{\underline{x}}\left[\frac{\partial E}{\partial t}\right] - a^2 F_{\underline{x}}[\triangle_{\underline{x}} E] = F_{\underline{x}}[\delta(\underline{x}, t)] \quad . \tag{2.37}$$

Daraus folgt dann mit obigen Rechenregeln:

$$\frac{\partial \tilde{E}}{\partial t} + a^2 |\underline{\xi}|^2 \tilde{E} = \delta(t) \quad . \tag{2.38}$$

Die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial t} + bf = \delta(t) \tag{2.39}$$

ist

$$f(t) = H(t) e^{-bt} \tag{2.40}$$

mit

$$H(t) = \begin{cases} 0 & : \ t < 0 \\ +1 & : \ t \geq 0 \end{cases} \quad . \tag{2.41}$$

Deshalb ist die Lösung von (2.38) :

$$\tilde{E}(\underline{\xi}, t) = H(t) e^{-a^2 |\underline{\xi}|^2 t} \quad . \tag{2.42}$$

Auf diese Lösung $\tilde{E}$ wenden wir jetzt die inverse Fouriertransformation $F_{\underline{\xi}}^{-1}$ an und erhalten:

$$\begin{aligned} E(\underline{x}, t) &= F_{\underline{\xi}}^{-1}[\tilde{E}(\underline{\xi}, t)] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\int\limits_{\mathbb{R}^n} H(t) \cdot e^{-a^2 |\underline{\xi}|^2 t - i \sum_{k=1}^{n} x_k \xi_k} \, d\underline{\xi} \\ &= \frac{H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\underline{x}|^2}{4a^2 t}} \quad . \end{aligned} \tag{2.43}$$

Für den Fall des massiven Körpers hat die Fundamentallösung also die spezielle Gestalt:

$$E(x, y, z, t) = \frac{H(t)}{8a^3 \sqrt{\pi t}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}} \quad . \tag{2.44}$$

Darstellung der Lösung mit Hilfe der Fundamentallösung

Die Darstellung der Lösung von (2.29) durch die Fundamentallösung wird in [41] ausführlich hergeleitet. Bei der Herleitung ergibt sich, daß die Lösung der Wärmeleitungsgleichung notwendigerweise die folgende Gestalt haben muß:

$$T(\underline{x}, t) = \int\limits_0^t \int\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(\underline{x} - \underline{y}, t - \tau) \cdot Q(\underline{y}, \tau) \, d\underline{y} \, d\tau + \int\int\limits_{\mathbb{R}^n} E(\underline{x} - \underline{y}, t) \cdot T_0(\underline{y}) \, d\underline{y} \quad . \tag{2.45}$$

Obige Formel besagt, daß man die Lösung der Wärmeleitungsgleichung erhält, indem man die rechte Seite der Differentialgleichung in Raum und Zeit mit der Fundamentallösung faltet und dazu die im Raum mit der Fundamentallösung gefaltete Anfangsbedingung addiert.

Das Cauchyproblem für den Stab

Wir betrachten einen sehr langen Stab, den wir mathematisch durch einen unendlich langen Stab idealisieren. Gesucht wird dann die Lösung $T(x,t)$ des Problems (2.29) für $n = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} &= Q(x,t) \qquad -\infty < x < \infty, t > 0 \\ T(x,0) &= T_0(x) \\ \lim_{x \to \pm\infty} |T(x,t)| &< M < \infty \quad . \end{aligned} \tag{2.46}$$

Die dritte Gleichung ist physikalisch sinnvoll, denn sie fordert, daß die Lösung $T(x,t)$ für $x \to \pm\infty$ beschränkt bleibt. Die Fundamentallösung für den Stab hat jetzt die Gestalt

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}. \tag{2.47}$$

Damit ergibt sich für die Lösung des Problems (2.46) als Spezialfall von (2.45):

$$\begin{aligned} T(x,t) &= E(x,t) * Q(x,t) + E(x,t) * T_0(t) \\ &= \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-\xi, t-\tau) \cdot Q(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} E(x-\xi,t) \cdot T_0(\xi)\, d\xi \qquad (2.48) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} \cdot Q(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \cdot T_0(\xi)\, d\xi \quad . \end{aligned}$$

2.3 Anwendung der Fundamentallösung in der Quellentheorie von Rykalin

In der Schweißtechnik wird das Temperaturfeld häufig nach der Quellentheorie von Rykalin bestimmt (siehe z. B. [29] und [30]). Die in dieser Theorie erhaltenen Gleichungen beruhen im wesentlichen auf den im vorigen Kapitel bestimmten Fundamentallösungen. Der Grundgedanke der Quellentheorie ist folgender: Der Körper hat zu einem Anfangszeitpunkt eine konstante Temperatur (zur Vereinfachung seien das 0 °C). Anschließend wird zu diesem Anfangszeitpunkt dem Körper in einem sehr kleinen Volumen Wärme zugeführt. Dadurch steigt die Temperatur in diesem kleinen Volumen im Vergleich zur konstanten Temperatur des Restkörpers. Anschließend breitet sich die zugeführte Wärme infolge der Wärmeleitung über den ganzen Körper aus. Wenn man jetzt von dem kleinen Volumen zu einem Punkt (hier nehmen wir der Einfachheit halber den Koordinatenursprung) übergeht und dem Körper die gesamte Wärme W augenblicklich (d. h. während eines einzigen Zeitpunktes) zuführt, erhält man als Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} - a^2 \triangle_{\underline{x}} T &= W \cdot \delta(\underline{x}, t) \\ T(\underline{x}, 0) &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist im $\mathbb{R}^n$ gerade die Fundamentallösung multipliziert mit dem Faktor W :

$$T(\underline{x}, t) = \frac{W H(t)}{(2a\sqrt{\pi t})^n} e^{-\frac{|\underline{x}|^2}{4a^2 t}} \quad . \tag{2.49}$$

Jetzt gilt für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(\underline{x}, t)\, d\underline{x} = W \quad , \tag{2.50}$$

d. h. die zugeführte Wärme bleibt erhalten. Außerdem wird dadurch der Faktor W auf der rechten Seite der Differentialgleichung erklärt. Je nach der Beschaffenheit des Körpers modellieren wir ihn jetzt als:

- Stab
  Im Stab ist die Temperatur über den gesamten Querschnitt des Stabes konstant und damit unabhängig von y und z . Die Wärme breitet sich damit eindimensional aus. Die Wärmeleitung betrachten wir für einen unendlich langen Stab, d. h. für $\mathbb{R}^1$.

- Platte
  Bei ebenen Platten wird die Temperatur über die Dicke als konstant angenommen und damit unabhängig von z . Die Wärme breitet sich damit zweidimensional aus (siehe auch Kapitel 1.5). Die Wärmeleitung betrachten wir im $\mathbb{R}^2$.

- massiver Körper
  In massiven Körpern breitet sich die Wärme dreidimensional aus. Die Wärmeleitung betrachten wir im Halbraum $\mathbb{R}^3_+ = \{\underline{x} : \underline{x} \in \mathbb{R}^3, z \geq 0\}$.

Die sich damit ergebenden Temperaturfelder sind

$$T(x,t) = \frac{WH(t)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}} \tag{2.51}$$

$$T(x,y,t) = \frac{WH(t)}{4a^2 \pi t} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2 t}} \tag{2.52}$$

$$T(x,y,z,t) = \frac{WH(t)}{4a^3 \sqrt{\pi t}^3} e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4a^2 t}} \quad . \tag{2.53}$$

Die Wärmeleitungsgleichung mit konstanten Koeffizienten ist linear. Das bedeutet, wir können jetzt auf die Lösungen das Superpositionsprinzip anwenden. Das Temperaturfeld beim Vorhandensein mehrerer Quellen erhält man damit durch Addition aller entsprechenden Lösungen für jeweils eine einzige Quelle. Für eine unbewegliche, aber nicht momentan sondern die Zeitdauer τ wirkende Quelle kann man damit ebenfalls das Temperaturfeld bestimmen. Die (zeitlich veränderliche) Leistungsdichte der Wärmequellen sei $Q = \frac{\partial W}{\partial t}$. Das Temperaturfeld für eine Platte ergibt sich dann durch die Gleichung:

$$T(x,y,t) = \int_0^t \frac{Q(t')H(\tau - t')}{4a^2\pi(t-t')} e^{-\frac{x^2+y^2}{4a^2(t-t')}} \, dt' \quad . \tag{2.54}$$

Ebenso kann das Temperaturfeld für eine sich bewegende Quelle bestimmt werden. Wenn sich die Quelle zum Zeitpunkt t' am Ort x', y' befindet, ergibt sich für eine Platte:

$$T(x,y,t) = \int_0^t \frac{Q(t')H(\tau - t')}{4a^2\pi(t-t')} e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4a^2(t-t')}} \, dt' \quad . \tag{2.55}$$

Analoge Temperaturfelder ergeben sich dann für massive Körper und den Stab.

Bisher wurde immer davon ausgegangen, daß der betrachtete Körper so groß ist, daß der Rand vernachlässigt und der Körper als unendlich groß betrachtet werden kann. Wenn der Einfluß des Randes nicht mehr vernachlässigbar ist, kann man in einigen Fällen das Temperaturfeld mit Hilfe des Spiegelungsprinzips konstruieren. Der Einfluß des Randes wird bei dieser Vorgehensweise durch zusätzliche Wärmequellen in dem unendlichen Gebiet modelliert. Dieses Prinzip, das bei Rykalin mit Reflexionsmethode bezeichnet wird, soll hier an zwei Beispielen verdeutlicht werden. Wenn der Körper durch eine Ebene S begrenzt wird, spiegeln wir die Wärmequelle im Punkt $P_1(x_1, y_1, z_1)$ an dieser Ebene und erhalten den Punkt $P_2(x_2, y_2, z_2)$. Für die Randbedingung $T_1 = 0$ auf S erhält die Quelle im Punkt P_2 die Energie $-W$, wenn die Quelle im Punkt P_1 die Energie W hat. Als Lösung ergibt sich dann die Überlagerung der sich durch die beiden Quellen ergebenden Temperaturfelder (hier für eine Platte):

$$T(x,y,z,t) = \frac{WH(t)}{4a^3\sqrt{\pi t}^3} \left(e^{-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}{4a^2 t}} \right). \tag{2.56}$$

Diese Lösung erfüllt offenbar die Bedingung $T = 0$ auf dem Rand S. Ebenso kann man eine Lösung für die Randbedingung $\frac{\partial T}{\partial \nu} = 0$ auf dem Rand S konstruieren. In diesem Fall wird im Punkt P_2 eine Wärmequelle mit der Energie $+W$ angeordnet, und die Lösung ist

$$T(x,y,z,t) = \frac{WH(t)}{4a^3\sqrt{\pi t}^3} \left(e^{-\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+(z-z_1)^2}{4a^2 t}} + e^{-\frac{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2+(z-z_2)^2}{4a^2 t}} \right). \tag{2.57}$$

Die Gefügeumwandlungen beim Schweißen beeinflussen in starkem Maße die Gebrauchswerteigenschaften der Schweißverbindung. Ein wichtiges Kriterium, um den Grad der Beeinflussung zu beurteilen, ist die Abkühlzeit t_A von 850 °C auf 500 °C. In diesem Temperaturbereich finden die Gefügeumwandlungen im Stahl statt, und die Dauer der Gefügeumwandlungen beeinflußt z. B. die Härte des Werkstoffs. Die Abkühlzeit soll für die Nahtmitte bestimmt werden, hier gilt $r = 0$. Durch Umstellen der Formel für die Temperatur nach der Zeit, erhält man für die Platte

$$t = \frac{W}{4a^2\pi T}$$

und für ein massives Werkstück

$$t = \left(\frac{W}{4a^3\sqrt{\pi}^3 T}\right)^{\frac{2}{3}} \quad .$$

Die Abkühlzeit von 850 °C bis 500 °C ergibt sich dann durch

$$t_{8/5} = \frac{W}{4a^2\pi}\left(\frac{1}{500 - T_0} - \frac{1}{850 - T_0}\right) \tag{2.58}$$

für die Platte und durch

$$t_{8/5} = \left(\frac{W}{4a^3\sqrt{\pi}^3}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\left(\frac{1}{500 - T_0}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{1}{850 - T_0}\right)^{\frac{2}{3}}\right] \tag{2.59}$$

für ein massives Werkstück.

Bei Verwendung leistungsstarker schneller Schweißwärmequellen erfolgt die Wärmeableitung praktisch senkrecht zur Schweißrichtung. Deshalb ist für diesen Fall eine einfachere Modellierung der Wärmeausbreitung gerechtfertigt (siehe [37, Abschnitt 4]), und man kann die Wärmeausbreitung in einem massiven Werkstück auf die Wärmeausbreitung in einer Platte zurückführen. Hier ergeben sich für die Abkühlungszeit von 850 °C bis 500 °C die Gleichungen

$$t_{8/5} = \left(\frac{Q}{v_s s}\right)^2 \frac{1}{4\pi\lambda c\rho}\left[\left(\frac{1}{500 - T_0}\right)^2 - \left(\frac{1}{850 - T_0}\right)^2\right] \tag{2.60}$$

für die Platte und

$$t_{8/5} = \frac{Q}{v_s}\frac{1}{2\pi\lambda}\left[\frac{1}{500 - T_0} - \frac{1}{850 - T_0}\right] \tag{2.61}$$

für ein massives Werkstück.

Häufig ergibt sich auch die Frage, ob das Temperaturfeld in einer Platte der Dicke s zweidimensional oder dreidimensional modelliert werden soll. In [30] benutzt man dafür die Gleichungen (2.60) und (2.61) für die Abkühlungszeiten bei schnellen leistungsstarken Wärmequellen und macht die Annahme, daß sich für die Übergangsblechdicke mit beiden Gleichungen dieselbe Abkühlgeschwindigkeit ergibt. Durch Gleichsetzen der beiden Gleichungen ergibt sich dann die Dicke s , bei der die zweidimensionale Wärmeableitung in die dreidimensionale übergeht. Diese Dicke s ist die Übergangsblechdicke $\delta_{\ddot{u}}$, bei kleinerer Dicke sind die Modellierungen für die Platte zu verwenden, bei größerer Dicke die Modellierungen für massive Werkstücke. Die mit dieser Gleichung bestimmten Übergangsblechdicken liegen für praktisch relevante Fälle im Bereich von 1 - 4 cm:

$$\delta_{\ddot{u}} = \sqrt{\frac{Q}{v_s}\frac{1}{2c\rho}\left[\frac{1}{500 - T_0} + \frac{1}{850 - T_0}\right]} \quad . \tag{2.62}$$

In [24, Seite 77] wird dieses Verfahren zur Bestimmung der Übergangsblechdicke kritisiert. Die dort angedeutete Vorgehensweise ist jedoch für eine Verwendung in einem Programm nicht geeignet, denn sie basiert auf Erfahrungswerten und nicht auf numerisch auswertbaren Gleichungen.

Kapitel 3

Modellierung der Thermospannungen

In diesem Abschnitt sollen zunächst die physikalische Bedeutung der Spannungen und Deformationen eines Körpers sowie die Beziehungen zwischen beiden zusammengestellt und erläutert werden. Dabei wird von den allgemein üblichen Vorraussetzungen der Elastizitäts- und Plastizitätstheorie ausgegangen. Diese Vorraussetzungen sind:

1. Der betrachtete Raum ist stetig vom Kontinuum ausgefüllt.
2. Der betrachtete Raum ist euklidisch.
3. Die Zeit ist unabhängig vom Koordinatensystem.
4. Der betrachtete Körper ist homogen und isotrop.
5. Die Formänderungen sind relativ klein.
6. Die Formänderungen gehen so langsam vor sich, daß die während der Deformation entstehenden Beschleunigungen vernachlässigt werden können (quasistatische Betrachtung).
7. Der Zustand des Körpers ist zu jedem Zeitpunkt stabil (Stabilitätspostulat von Drucker[1]).

Die grundlegenden Beziehungen werden in [13] hergeleitet und kommentiert. Hier werden aus der allgemeinen Theorie die Modellierungen ausgewählt und aufbereitet, die den Problemen beim Schweißen adäquat und numerisch bearbeitbar sind. Für das bessere Verständnis der Theorie untersuchen wir zuerst einen Stab.

3.1 Mechanische Grundbegriffe beim Stab

Wir betrachten einen zylindrischen Stab, der einem Zugversuch unterworfen wird. Zu Beginn des Versuches habe der Stab die Anfangslänge $l_0 = l(t_0)$ und die Querschnittsfläche $A_0 = A(t_0)$. Zum Zeitpunkt t werde der Stab durch die Kraft $F = F(t)$ gedehnt und habe dadurch die Länge $l(t)$ und die Querschnittsfläche $A = A(t)$ (siehe Abbildung 3.1). Im Stab herrscht dann eine über die Stablänge konstante Längszugspannung σ, die durch $\sigma = \sigma(t) = \frac{F(t)}{A(t)}$ definiert wird. Die Deformation ϵ des Stabes definieren wir durch $\epsilon = \epsilon(t) = \frac{\triangle l}{l}$. Durch Bestimmung der Spannungen und Deformationen für immer größer werdendes F erhält man das Spannungs-Dehnungs-Diagramm (siehe Abbildung 3.2). Man erkennt, daß für „kleine “Formänderungen zwischen den Spannungen und Deformationen ein linearer Zusammenhang besteht. Dieser wird durch das Hookesche Gesetz formuliert:

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \qquad (\text{ E - Elastizitätsmodul}) \quad . \tag{3.1}$$

In dem Bereich, in dem das Hookesche Gesetz gilt, sind die Deformationen elastisch. Das heißt, nach Entfernen der Kraft F geht der Stab wieder in den Ausgangszustand zurück. Während

[1] Genau genommen besagt das Stabilitätspostulat, daß neue Deformationen nicht spontan entstehen, sondern ihre Entstehung Arbeit verbraucht.

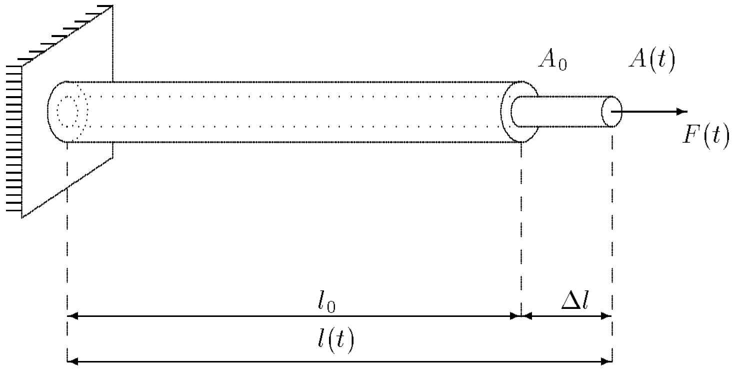


Abbildung 3.1: Zugversuch am Stab

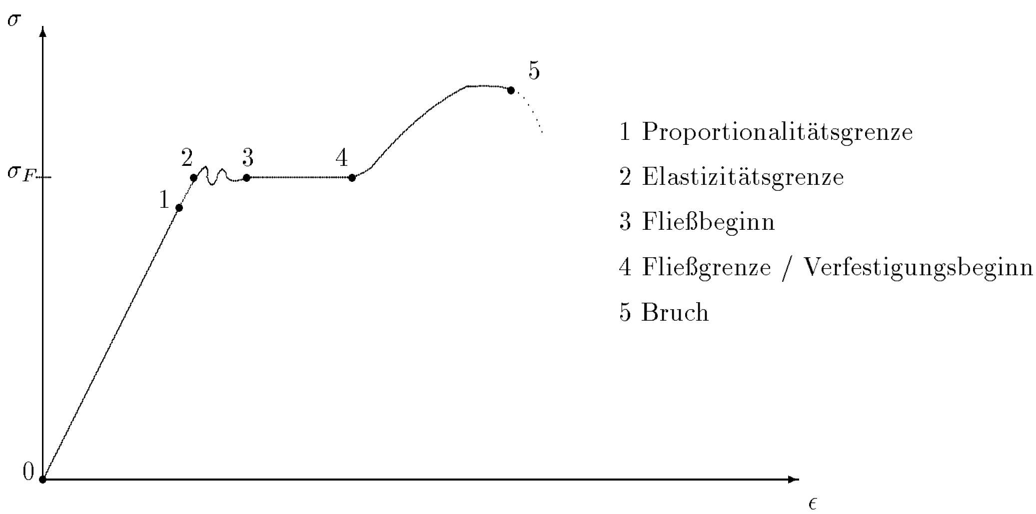


Abbildung 3.2: Spannungs-Dehnungs-Diagramm

der Deformation sollte der Stab sich jetzt immer im Gleichgewicht befinden. Durch Aufstellen des Kräftegleichgewichts erhält man für die Spannung die Bedingung

$$\frac{\partial}{\partial x}(A \cdot \sigma) = -X \quad . \tag{3.2}$$

Dabei bezeichnet $X = X(x,t)$ die am Ort x zum Zeitpunkt t wirkende Kraft pro Längeneinheit (später ist X dann die Volumenkraft, z. B. die Gewichtskraft). Jetzt betrachten wir die Längsverschiebung des Stabpunktes x, die wir mit $u(x)$ bezeichnen. Für die Längsverschiebung gilt offenbar die Beziehung

$$u(x) = \int_0^x \epsilon(\xi)\, d\xi + u(0) \quad .$$

Daraus ergibt sich dann

$$\epsilon(x) = \frac{du}{dx} \quad . \tag{3.3}$$

Damit haben wir jetzt im elastischen Fall die drei Gleichungen (3.1), (3.2) und (3.3) für die drei Unbekannten ϵ, σ und u erhalten. Im plastischen Fall müssen wir das Hookesche Gesetz (3.1) gegen ein anderes Materialgesetz austauschen.

Die Grenzspannung, bei der der elastische Bereich endet und die plastische Deformation beginnt, ist die Fließspannung σ_F. Wird die Kraft jetzt so weit erhöht, daß die Spannungen σ_F überschreiten, dann verhält sich der Stab mit weiterer Erhöhung von F nicht mehr rein elastisch, sondern es treten plastische Deformationen auf. Die Deformationen können nun in einen elastischen Anteil ϵ^e und einen plastischen Anteil ϵ^p zerlegt werden: $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$. Das heißt, für die Deformationen gilt das Superpositionsprinzip. Die plastischen Deformationen bleiben bei der Entlastung des Stabes erhalten. In Abbildung 3.3 ist z. B. vereinfacht folgender Versuchsablauf dargestellt: Wir beginnen mit einem Stab ohne Spannungen und Deformationen (Punkt O). Jetzt wird langsam die Kraft F erhöht, die Spannungen und Deformationen

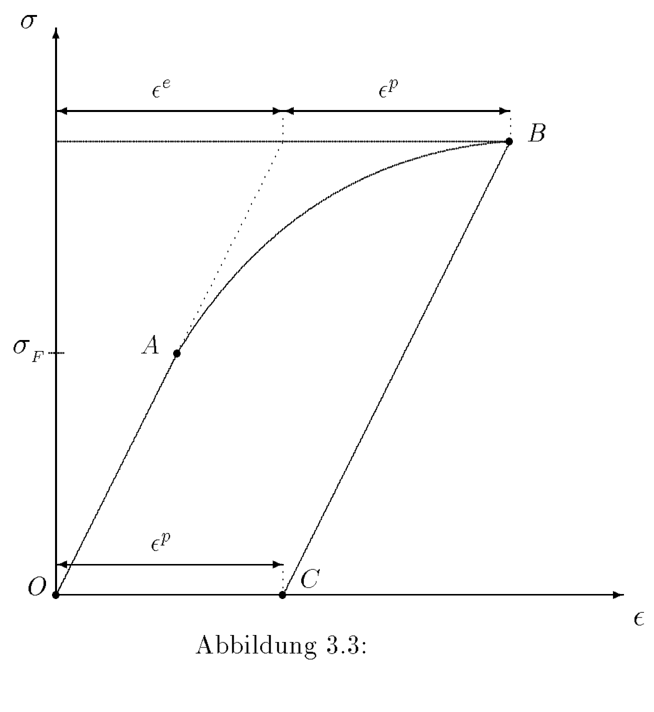


Abbildung 3.3:

verhalten sich gemäß dem Hookeschen Gesetz (Strecke OA). Bei Erreichen der Grenzspannung σ_F beginnt sich der Stab mit weiter wachsender Kraft immer mehr plastisch zu deformieren, der elastische Zuwachs der Deformation nimmt ab (Strecke AB). Nach Erreichen des Punktes B wird der Stab wieder entlastet. Jetzt verhält er sich wieder elastisch (Strecke BC), die elastische Deformation geht wieder gemäß dem Hookeschen Gesetz zurück: $\epsilon^e = \frac{\sigma}{E}$, der plastische Anteil der Deformation bleibt erhalten. Nach vollständiger Entlastung (Punkt C) ist die elastische Deformation wieder 0, es bleibt nur die plastische Deformation zurück. Da das Spannungs-Dehnungs-Diagramm i.a. eine krummlinige Form hat, stößt man bereits bei einfachen Aufgaben auf mathematische Schwierigkeiten. Deshalb werden idealisierte Werkstoffmodelle eingeführt (siehe Abbildung 3.4). Damit diese Modelle zu mathematisch sinnvollen Ergebnissen führen,

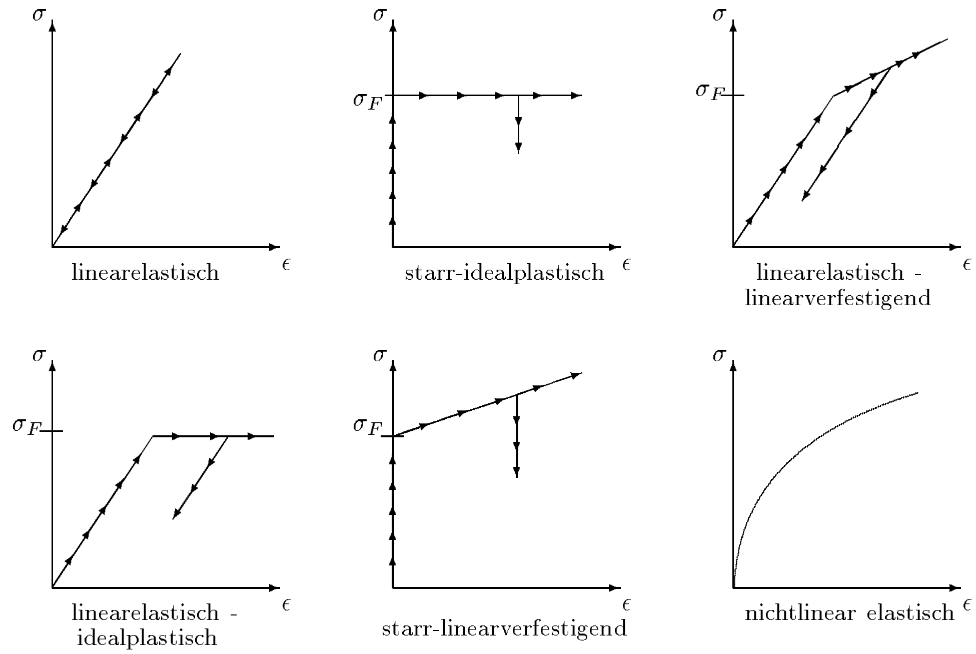


Abbildung 3.4: Werkstoffmodelle

müssen sie bestimmten Bedingungen genügen (siehe z. B. [16]):

- Die Proportionalitätsgrenze und der Fließbeginn werden gleichgesetzt (siehe Abbildung 3.2).
- Die Spannung ist eine ungerade, monoton wachsende Funktion der Deformation.
- Die Be- und Entlastung nach plastischer Deformation verlaufen linear elastisch.
- Nichtlineare Erscheinungen, wie Hysteresis, Bauschinger-Effekt oder Ermüdung bei wechselnder Beanspruchung werden vernachlässigt.

Bei Problemen, bei denen die plastischen Verformungen vernachlässigt werden können, kann man das linearelastische Werkstoffmodell benutzen. Analog kann man das starr-idealplastische bzw. starr-linearverfestigende Werkstoffmodell für Probleme verwenden, bei denen die elastische Deformation vernachlässigt werden kann (wie z. B. beim Walzen). Beim Schweißen ist es dagegen so, daß sowohl elastische als auch plastische Deformationen auftreten. Deshalb benutzen wir für die Berechnung der Spannungen das linearelastisch-idealplastische[2] Werkstoffmodell. In diesem Modell wird die krummlinige Form des Spannungs-Dehnungs-Diagramms durch zwei Geradenabschnitte approximiert. Das linearelastisch-idealplastische Modell geht von folgenden Annahmen aus:

- Im elastischen Bereich gilt

$$|\sigma| < \sigma_F \qquad \Rightarrow \epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{und} \quad \epsilon = \epsilon^e \quad . \tag{3.4}$$

[2]In der Literatur wird dieses Modell auch als idealelastisch-idealplastisch bezeichnet.

- Im plastischen Zustand gilt $|\sigma| = \sigma_F$. Es treten (bei unveränderter Größe der Spannung) plastische Deformationen auf, die gleichsinnig mit der Spannung sind (das heißt, bei mehrdimensionalen Körpern findet die plastische Deformation in Richtung der größten Spannung statt), sonst aber beliebig groß werden können. Bezeichnet man die zeitlichen Ableitungen der Spannungen mit $\dot{\sigma}$ und die plastischen Dehnungszuwächse mit $\dot{\epsilon}^p$, dann gilt:
$$\left.\begin{matrix} |\sigma|=\sigma_F \\ \dot{\sigma}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \sigma \cdot \dot{\epsilon}^p \geq 0 \quad . \tag{3.5}$$

- Die Entlastung erfolgt elastisch. Es gilt
$$\left.\begin{matrix} |\sigma| \leq \sigma_F \\ \sigma\dot{\sigma} < 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dot{\epsilon}^e = \frac{1}{E} \cdot \dot{\sigma} \quad . \tag{3.6}$$

- Die Wiederbelastung verläuft elastisch, solange die Grenzspannung σ_F nicht erreicht wird:
$$|\sigma| < \sigma_F \qquad \Rightarrow \dot{\epsilon}^e = \frac{1}{E} \cdot \dot{\sigma} \quad . \tag{3.7}$$

Mit diesen Annahmen erhält man:
$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p = \frac{1}{E} \cdot \sigma + \epsilon^p \quad . \tag{3.8}$$

Im plastischen Fall bestehen also zwischen den Spannungen und Deformationen keine algebraischen Beziehungen (wie beim Hookeschen Gesetz) mehr. Das liegt daran, daß bei plastischen Deformationen Energie „verbraucht" wird und somit irreversible Deformationen auftreten. Der plastische Deformationszustand hängt damit auch von der Geschichte des Belastungsvorganges ab. Deshalb kann man im plastischen Fall keinen eineindeutigen Zusammenhang mit den Spannungen herstellen. Man kann aber eine solche Beziehung zwischen den Ableitungen der Deformationen und der Spannungen nach der Zeit annehmen. Durch Experimente wurde gezeigt, daß dadurch das Verhalten vieler Materialien ausreichend genau modelliert wird. Für den Stab haben wir als Modell für den plastischen Fall damit die Beziehungen (3.1), (3.2) und (3.8). Die Gleichungen, die die Bestimmung von ϵ^p quantitativ zum Ausdruck bringen, werden auf Seite 43 erläutert.

3.2 Deformationstheorie

Im vorhergehenden Abschnitt wurde die Beziehung zwischen der Deformation und der Verschiebung eines Stabes erläutert (Gleichung (3.3)). Die Deformationstheorie beschäftigt sich jetzt mit den Beziehungen zwischen Deformation und Verschiebung im allgemeinen Fall. Dazu soll zuerst der Deformationszustand eines dreidimensionalen Körpers näher untersucht werden. Als Koordinaten benutzen wir dazu die kartesischen Koordinaten des undeformierten Körpers (Lagrange-Koordinaten). Dazu werde aus einem Körper ein infinitesimaler Würfel herausgeschnitten, dessen Kantenrichtungen mit den Richtungen der Basisvektoren des kartesischen Koordinatensystems übereinstimmen. Den Deformationszustand des betrachteten infinitesimalen Würfels können wir jetzt durch den Deformationstensor ϵ_{ij} mit $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x, y, z, t)$ beschreiben:
$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}(x, y, z, t) = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.9}$$

Die einzelnen Komponenten des Deformationstensors kann man dabei gemäß Abbildung 3.5 veranschaulichen. Der Deformationstensor ist symmetrisch, das heißt, für ihn gilt $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$. Die Symmetrie ergibt sich daraus, daß wir die reine Deformation untersuchen wollen. Ein antisymmetrischer Anteil des Deformationstensors würde einer starrkörperartigen Rotation[3]

[3]Die Bewegung eines Körpers heißt starrkörperartig, wenn dabei der gegenseitige Abstand je zweier seiner Punkte konstant bleibt. Offenbar haben diese Bewegungen sechs Freiheitsgrade, drei für Verschiebungen und drei für Rotationen.

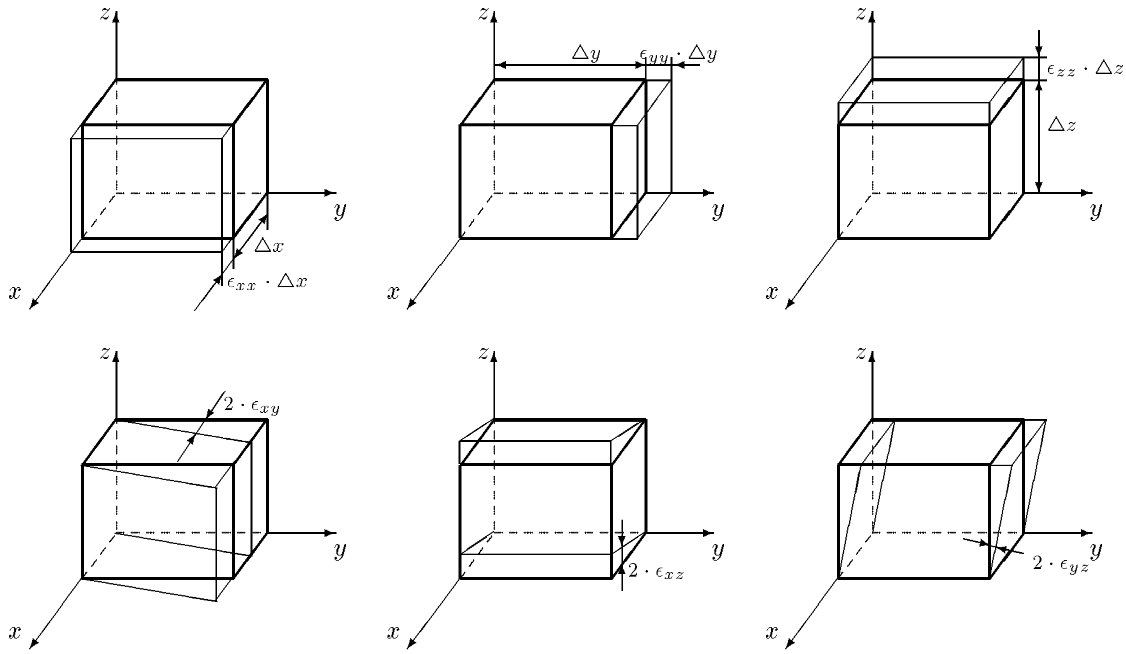


Abbildung 3.5: Komponenten des Deformationstensors

entsprechen, es interessieren hier aber nur die Anteile, die aus den Verformungen des Körpers stammen. Durch die Beziehung

$$\epsilon_0 = \frac{1}{3} \left(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \right) \tag{3.10}$$

wird nun die mittlere Dehnung definiert. Mit der mittleren Dehnung kann der Deformationstensor in zwei Teile aufgespalten werden:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_0 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_0 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.11}$$

Der erste Summand ist der Deformations-Kugeltensor ϵ_{ij}^0 , der die Volumendehnung charakterisiert. Der zweite Summand ist der Verzerrungsdeviator und wird durch

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{11} - \epsilon_0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} - \epsilon_0 & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} - \epsilon_0 \end{pmatrix} \tag{3.12}$$

$$\text{bzw. durch } e_{ij} = \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \cdot \epsilon_0 \tag{3.13}$$

definiert. Der Verzerrungsdeviator charakterisiert die Gestaltänderung des Elements. Auf Grund der Deformation des Körpers wird jeder Punkt (x, y, z) aus seiner Anfangslage um den Vektor u verschoben. Entsprechend dem gewählten Koordinatensystem kann u in die Komponenten u_x, u_y und u_z zerlegt werden. Der Deformationstensor (es handelt es sich hier wegen der Lagrange-Koordinaten um den Greenschen Deformationstensor) kann jetzt durch diese Verschiebungskomponenten dargestellt werden (Wir benutzen hier die Tensorschreibweise, diese wird in Anhang B erläutert):

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[u_{i,j} + u_{j,i} + \sum_{k=1}^{3} u_{k,i} u_{k,j} + \ldots \right] \quad . \tag{3.14}$$

Diese Beziehung erhält man, indem man am undeformierten Körper zwei benachbarte Punkte P und P' betrachtet. Nach der Deformation werden dann die Verschiebungskomponenten u_i des einen Punktes mit Hilfe der Taylor-Reihe durch die Verschiebungen und deren Ableitungen im anderen Punkt ausgedrückt. Dadurch erhält man den Tensor $u_{i,j}$ der Verschiebungsgradienten. Dieser Tensor kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Tensor ω_{ij} aufgespalten werden. Der antisymmetrische Tensor ω_{ij} beschreibt jetzt den Anteil der Verschiebung, der aus der starrkörperartigen Verdrehung stammt und wird deshalb Rotationstensor genannt. Der symmetrische Anteil beschreibt dagegen die relative Verschiebung, die aus der Verformung der Körperelemente stammt, und ist mit dem Deformationstensor ϵ_{ij} identisch. Daraus folgt dann (3.14).

Wir hatten vorausgesetzt, daß die Formänderungen klein sind. Deshalb können in (3.14) die Summe und alle weiteren Terme vernachlässigt und der Deformationstensor damit linearisiert werden:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}u_x & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}u_x + \frac{\partial}{\partial x}u_y\right] \\
\epsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}u_y & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}u_y + \frac{\partial}{\partial y}u_z\right] \\
\epsilon_{zz} &= \frac{\partial}{\partial z}u_z & \epsilon_{zx} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial z}u_x + \frac{\partial}{\partial x}u_z\right]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\text{bzw. } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left[u_{i,j} + u_{j,i}\right] \quad . \tag{3.16}$$

Die Gleichungen (3.15) bzw. (3.16) heißen geometrische Beziehungen, da man sie ausschließlich auf Grund geometrischer Verhältnisse ableiten kann. Sie sind damit materialunabhängig. Aus den geometrischen Beziehungen kann man durch Differenzieren die Verschiebungen eliminieren. Man erhält dann die sogenannten Kompatibilitätsbedingungen, deren Erfüllung gewährleistet, daß sich die Verschiebungen eindeutig und widerspruchsfrei aus den Deformationen bestimmen lassen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial y^2}\epsilon_{xx} + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\epsilon_{yy} - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\epsilon_{xy} &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\epsilon_{yy} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\epsilon_{zz} - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\epsilon_{yz} &= 0 \\
\frac{\partial^2}{\partial x^2}\epsilon_{zz} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\epsilon_{xx} - 2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\epsilon_{xz} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial}{\partial x}\epsilon_{yz} + \frac{\partial}{\partial y}\epsilon_{zx} + \frac{\partial}{\partial z}\epsilon_{xy}\right] - \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}\epsilon_{xx} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial y}\left[-\frac{\partial}{\partial y}\epsilon_{zx} + \frac{\partial}{\partial z}\epsilon_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\epsilon_{yz}\right] - \frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\epsilon_{yy} &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{\partial}{\partial z}\epsilon_{xy} + \frac{\partial}{\partial x}\epsilon_{yz} + \frac{\partial}{\partial y}\epsilon_{zx}\right] - \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\epsilon_{zz} &= 0 \quad .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Im Abschnitt 3.1 wurde bereits erwähnt, daß im plastischen Zustand nicht die Deformationen selbst in einem unmittelbaren Zusammenhang mit den Spannungen stehen, sondern nur ihre zeitlichen Ableitungen (Geschwindigkeiten). Deshalb verwendet man Deformationsgeschwindigkeiten. Die Deformationsgeschwindigkeiten stellen die Geschwindigkeit der Änderung der Deformationen dar. Der Deformationsgeschwindigkeitstensor $\dot{\epsilon}_{ij}$ kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \dot{\epsilon}_{xy} & \dot{\epsilon}_{xz} \\ \dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \dot{\epsilon}_{yz} \\ \dot{\epsilon}_{zx} & \dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\epsilon}_{11} & \dot{\epsilon}_{12} & \dot{\epsilon}_{13} \\ \dot{\epsilon}_{21} & \dot{\epsilon}_{22} & \dot{\epsilon}_{23} \\ \dot{\epsilon}_{31} & \dot{\epsilon}_{32} & \dot{\epsilon}_{33} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.18}$$

Analog kann man die Verschiebungsgeschwindigkeiten $\dot{u}_i$ einführen. Für die Geschwindigkeitstensoren gelten die gleichen Beziehungen und Feststellungen, die bereits für die „normalen“ Tensoren erläutert wurden. Beispielsweise kann man sie in einen Kugel- und Deviatoranteil aufspalten:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}^0_{ij} + \dot{e}_{ij} \quad ,$$

oder den Deformationsgeschwindigkeitstensor durch die Verschiebungsgeschwindigkeiten darstellen:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}\left[\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right] \quad . \tag{3.19}$$

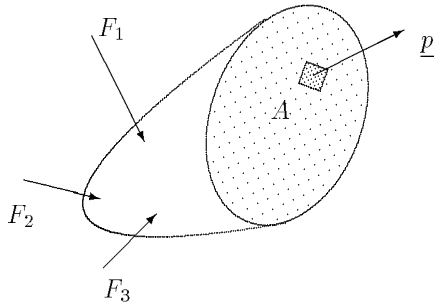
Auf einem Teilbereich S_6 kann jetzt die Verschiebung vorgegeben sein. Das ist z. B. auf dem Oberflächenbereich der Fall, wo der Körper fest eingespannt ist. Die Verschiebung muß dann auf S_6 die sogenannte kinematische Randbedingung

$$u_i = \hat{u}_i \qquad \text{auf } S_6 \tag{3.20}$$

erfüllen.

3.3 Spannungstheorie

In diesem Abschnitt soll nun die Beziehung (3.2) auf dreidimensionale Körper verallgemeinert werden. Wir betrachten dazu einen Körper, auf den äußere Kräfte F_i wirken. Durch den Körper legen wir jetzt eine Schnittfläche und betrachten in der Schnittfläche die kleine Fäche A (siehe Abbildung 3.6, links). Damit der Teilkörper in dem gleichen Zustand wie vor dem Schnitt bleibt, muß jetzt auf jede solcher kleinen Flächen A eine Kraft wirken. Durch den Grenzübergang, bei dem die Fläche A auf einen Punkt zusammengezogen wird, erhalten wir auch einen Grenzwert für die Kraft pro Fläche in diesem Punkt, den Spannungsvektor $\underline{p}$. Dieser Spannungsvektor kann jetzt in die Komponenten $\underline{p} = (p_x, p_y, p_z)$ entsprechend dem kartesischen Koordinatensystem zerlegt werden. Wenn wir diese Betrachtung im gewählten



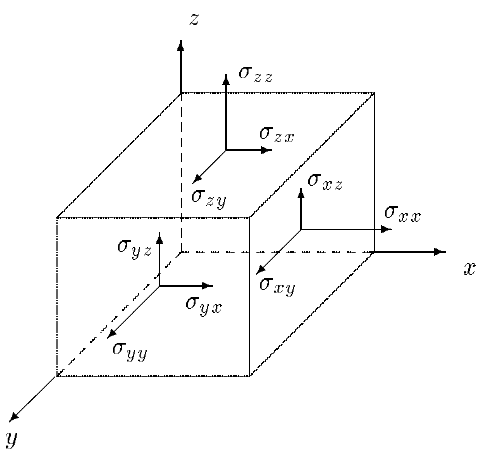


Abbildung 3.6: Der Spannungstensor

Punkt für drei achsenparallele Schnittflächen mit den drei entsprechenden Spannungsvektoren durchführen, erhalten wir neun Spannungen entsprechend dem rechten Teilbild der Abbildung 3.6 . Durch diese neun Spannungen ist der Spannungszustand eines Punktes eindeutig bestimmt. Diese einzelnen Spannungen können zu einem Tensor, dem Spannungstensor, zusammengefaßt werden:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x,y,z,t) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix} \quad . \tag{3.21}$$

In (3.21) ist der Spannungstensor in den beiden am meisten gebräuchlichen Formen angegeben. Die Spannungen σ_{xx}, σ_{yy} und σ_{zz} heißen Normalspannungen, $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$ und σ_{zy} sind die Tangential- oder Schubspannungen. Durch die Beziehung

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right) \tag{3.22}$$

ist die mittlere Normalspannung σ_0 definiert. Zweckmäßigerweise wird der Spannungstensor in zwei Teile aufgespalten: Der erste Summand entspricht dabei einem Zustand allseitig gleicher Normalspannung (hydrostatischer Druck), der zweite Summand ist der Spannungsdeviator:

$$s_{ij} = \begin{cases} \sigma_{ij} & \text{falls}\, i \neq j \\ \sigma_{ij} - \sigma_0 & \text{falls}\, i = j \end{cases} \tag{3.23}$$

bzw. in der Tensorschreibweise $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_0$. Auf Grund des Gleichgewichts der Momente muß der Spannungstensor die Bedingungen

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \tag{3.24}$$

erfüllen. Das heißt, der Spannungstensor ist symmetrisch. Aus der Forderung, daß die Kräfte im Gleichgewicht stehen sollen, ergeben sich die Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} + X_x &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{yx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{yz} + X_y &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}\sigma_{zx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{zy} + \frac{\partial}{\partial z}\sigma_{zz} + X_z &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{bzw.}\ \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad . \tag{3.25}$$

Dabei ist $X = (X_x, X_y, X_z)$ die Volumenkraft pro Volumeneinheit. Diese Beziehungen stellen die Verallgemeinerung von Gleichung (3.2) für den Stab dar. Sie gelten auf Grund der Annahme, daß die Formänderungen quasistatisch betrachtet werden können. In [4] werden für eine dynamische Betrachtung die Gleichungen

$$\sigma_{ij,j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{3.26}$$

angegeben.

Der Spannungstensor ist symmetrisch. Deshalb gibt es in jedem Punkt drei aufeinander senkrecht stehende Richtungen, so daß für ein Koordinatensystem, dessen Achsen mit diesen Richtungen übereinstimmen, alle Schubspannungen verschwinden. Diese Richtungen werden Spannungshauptachsen genannt. Die entsprechenden Normalspannungen σ_{xx}, σ_{yy} und σ_{zz} werden Hauptspannungen ($\sigma_{I} \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$) bezeichnet. Der Spannungstensor kann damit in jedem Punkt auch durch

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{I} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{pmatrix} \tag{3.27}$$

dargestellt werden. Diese Darstellung gilt aber nur für einen konkret betrachteten Punkt, denn von Punkt zu Punkt können sich die Richtungen der Spannungshauptachsen ändern.

Analog zu der Definition der Deformationsgeschwindigkeit werden jetzt die Spannungsgeschwindigkeiten $\dot{\sigma}_{ij}$ definiert. Für die Spannungsgeschwindigkeiten gelten dann entsprechend die Beziehungen

$$\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i = 0 \quad . \tag{3.28}$$

Auf einem Teilbereich S_7 der Oberfläche können jetzt äußere Kräfte p_i einwirken. Daraus ergibt sich dann die Randbedingung

$$\sigma_{ij}\nu_j = p_i \qquad i = 1, \ldots, 3 \quad . \tag{3.29}$$

3.4 Materialgesetze

Die Gleichungen, die sich aus der Deformations- und Spannungstheorie ergeben, reichen im allgemeinen nicht zur eindeutigen Beschreibung des Spannungs- und Deformationszustandes aus.

		techn.K.		Lame. K.			
		E	μ	λ	ν	G	K
E	μ	E	μ	$\frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}$	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{E}{2(1+\mu)}$	$\frac{1-2\mu}{E}$
λ	ν	$\frac{\nu(3\lambda+2\nu)}{\lambda+\nu}$	$\frac{\lambda}{2(\lambda+\nu)}$	λ	ν	ν	$\frac{\sqrt{\lambda^2+2\lambda\nu}-\lambda}{2\lambda\nu}$
G	K	$\frac{3G}{1+GK}$	$\frac{1-2GK}{2(1+GK)}$	$\frac{1}{2K(KG+1)}$	G	G	K

Tabelle 3.1: Umrechnung der Materialkonstanten

Material	E in kPa	μ in 1	σ_F in Pa	α in $\frac{1}{K}$
Baustahl St 37	$21 * 10^7$	0.3	$22 * 10^7$	$1.2 * 10^{-10}$
Baustahl St 52	$22 * 10^7$	0.3	$36 * 10^7$	$1.2 * 10^{-10}$
35CrNi18	-	-	$92 * 10^7$	-
Gußeisen	$9 * 10^7$	0.25	—	$1.0 * 10^{-10}$
Kupfer	$12 * 10^7$	0.35	$29 * 10^7$	$1.6 * 10^{-10}$
Aluminium	$6.7 * 10^7$	0.34	$5.5 * 10^7$	$2.3 * 10^{-10}$

Tabelle 3.2: Materialkonstanten

Analog zum Stab brauchen wir deshalb Gleichungen für den Zusammenhang zwischen Spannungen und Deformationen. Im allgemeinen Fall ist dieser Zusammenhang ein Materialgesetz der Form

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, \kappa, \underline{x}, T, t) \quad , \tag{3.30}$$

wobei κ die Richtung kennzeichnet. Da nach den gemachten Vorraussetzungen der Werkstoff isotrop ist, ist der Zusammenhang zwischen σ und ϵ unabhängig von der Richtung und aufgrund der Homogenität unabhängig vom Ort. Daher und aus Symmetriegründen bleiben von den 81 Materialwerten des allgemeinen Zusammenhangs

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\ \epsilon_{kl}$$

nur zwei unabhängige Materialkonstanten übrig. Das sind die beiden Laméschen Konstanten λ und ν. Häufig werden anstelle der Laméschen Konstanten auch der Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Querkontraktionszahl μ bzw. der Schubmodul G und der Kompressionsmodul[4] K benutzt. Diese Größen lassen sich alle entsprechend Tabelle 3.1 ineinander umwandeln. Obwohl alle Materialkonstanten im weiteren benutzt werden, handelt es sich dabei aber nur um zwei unabhängige Konstanten. Für das Materialgesetz müssen wir jetzt den elastischen und den plastischen Fall unterscheiden. Im linearelastischen Fall wird der Zusammenhang wieder durch das Hookesche Gesetz beschrieben, das allgemein folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu\cdot(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right] & \epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu\cdot(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right] & \epsilon_{xz} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xz} \\
\epsilon_{zz} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \mu\cdot(\sigma_{yy}+\sigma_{xx})\right] & \epsilon_{yz} &= \frac{1}{2G}\sigma_{yz}
\end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\text{bzw.} \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{E}\big((1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\sigma_{kk}\delta_{ij}\big) \quad .$$

Mit Hilfe der Deviatoren können die Formeln (3.31) auch in der Form

$$\epsilon_0 = K\cdot\sigma_0 \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
e_{xx} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{xx} & e_{yy} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{yy} & e_{zz} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{zz} \\
e_{xy} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{xy} & e_{xz} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{xz} & e_{yz} &= \frac{1}{2G}\cdot s_{yz}
\end{aligned} \tag{3.33}$$

geschrieben werden. Um zu entscheiden, wann der plastische Bereich beginnt, verwenden wir die Fließbedingung von Huber - v. Mises - Hencky (ausführlich wird diese Bedingung in [13] oder

[4]Der Kompressionsmodul wird in der Literatur häufig auch durch $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ definiert.

[16] erläutert). In der Literatur werden unter anderem auch die Fließbedingung von Tresca-Saint-Venant oder die Fließbedingung von C. Coulomb angegeben. Die Fließfunktion f in der v. Mises - Form wird durch

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{6}\left[(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2+(\sigma_{yy}-\sigma_{zz})^2+(\sigma_{zz}-\sigma_{xx})^2\right] \\ &\quad +\sigma_{xy}^2+\sigma_{xz}^2+\sigma_{yz}^2-\tau_F^2 \\ &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}-\tau_F^2 \end{aligned} \tag{3.34}$$

definiert. Hierbei ist τ_F die Schubspannung, die bei reinem Schub das Fließen (plastische Deformation) verursacht. Diese Spannung steht mit der Zugspannung σ_F , die bei reinem Zug oder Druck Fließen verursacht, durch $\sigma_F = \sqrt{3}\cdot\tau_F$ in Relation. Nach dieser Bedingung ist

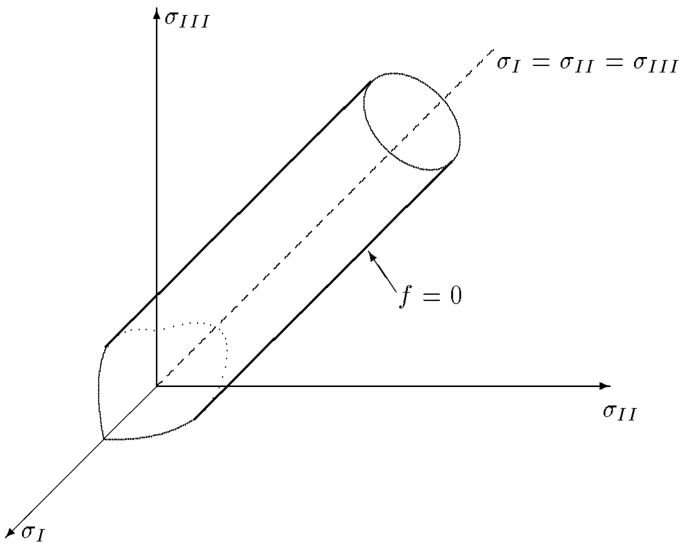


Abbildung 3.7: Die Fläche f=0 im Hauptspannungsraum

das Fließen unabhängig vom hydrostatischen Druck (d.h. unabhängig von σ_0). Die Fläche $f = 0$ wird im Hauptspannungsraum durch einen Kreiszylinder dargestellt, dessen Achse mit der Geraden durch den Nullpunkt zusammenfällt, die alle Koordinatenrichtungen unter dem gleichen Winkel schneidet (siehe Abbildung 3.7). Mit der Funktion f kann das Verhalten eines Körpers jetzt folgendermaßen beschrieben werden:

1. $f < 0$ Der Körper befindet sich im elastischen Zustand, die Formänderungen sind elastisch.

2. $f = 0$ Der Körper befindet sich im plastischen Zustand, die Formänderungen sind plastisch.

Für den Zusammenhang zwischen den Spannungen und Deformationen im plastischen Fall benutzen wir das Prandtl-Reussche Stoffgesetz. Dieses beruht auf folgenden Annahmen:

- Die Deformationen können in einen elastischen und einen plastischen Anteil aufgespalten werden:
$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p \quad . \tag{3.35}$$

- Die verbleibende Volumendehnung ist Null, das heißt
$$3\epsilon_0^p = \epsilon_{ii}^p = \epsilon_{xx}^p + \epsilon_{yy}^p + \epsilon_{zz}^p = 0 \quad . \tag{3.36}$$

- Der Körper verhält sich entsprechend der Fließbedingung (3.34).
- Bei plastischer Deformation ist die Deformationsgeschwindigkeit den Komponenten des Spannungsdeviators proportional:

$$\dot{\epsilon}^{p}_{ij} = \Lambda \cdot (\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0) = \Lambda \cdot s_{ij} \quad . \tag{3.37}$$

Dabei ist der Proportionalitätsfaktor Λ eine skalare Funktion, auf deren Bestimmung später noch eingegangen wird. Indem das Hookesche Gesetz (3.32) ebenfalls in eine Beziehung für die Geschwindigkeiten umgewandelt wird, erhält man damit zusammen das allgemeine Stoffgesetz eines linearelastisch-idealplastischen Körpers nach Prandtl-Reuss:

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{xx} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{xx} + \Lambda \cdot s_{xx} & \dot{e}_{xy} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{xy} + \Lambda \cdot s_{xy} \\
\dot{e}_{yy} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{yy} + \Lambda \cdot s_{yy} & \dot{e}_{xz} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{xz} + \Lambda \cdot s_{xz} \\
\dot{e}_{zz} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{zz} + \Lambda \cdot s_{zz} & \dot{e}_{yz} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{yz} + \Lambda \cdot s_{yz}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

$$\text{und } \dot{\epsilon}_0 = K \cdot \dot{\sigma}_0 \qquad (\text{ da } \epsilon^p_0 = 0 \text{ nach (3.36) }) \quad . \tag{3.39}$$

Mit Hilfe von (3.39) kann man dann von den Deviatorspannungen und -deformationen zu den tatsächlichen Spannungen und Deformationen übergehen. Es muß jetzt noch der Proportionalitätsfaktor Λ bestimmt werden. Für ihn ergibt sich im Fall des Prandtl-Reusschen Stoffgesetzes durch die Untersuchung der Arbeit, die von den Spannungen während der plastischen Deformation verrichtet werden muß, die Beziehung (siehe [13, Seite 68 ff.]):

$$\begin{aligned}
\Lambda &= \frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij} \cdot \dot{e}^p_{ij} \qquad (3.40) \\
&= \frac{1}{2\tau_F^2}\left[s_{xx} \cdot \dot{e}^p_{xx} + s_{xy} \cdot \dot{e}^p_{xy} + \ldots + s_{zz} \cdot \dot{e}^p_{zz}\right] \quad .
\end{aligned}$$

Damit kann (3.38) folgendermaßen geschrieben werden:

$$\dot{e}_{ij} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{ij} + \left[\frac{1}{2\tau_F^2} s_{kl} \cdot \dot{e}^p_{kl}\right] s_{ij} \quad . \tag{3.41}$$

Ebenso kann man die Spannungsdeviatorgeschwindigkeiten durch die Deformationsdeviatorgeschwindigkeiten und die Deviatorspannungen ausdrücken:

$$\dot{s}_{ij} = 2G\left[\delta_{ij}\delta_{kl} - \frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij} s_{kl}\right] \dot{e}_{kl} \quad . \tag{3.42}$$

In (3.41) und (3.42) kommt zum Ausdruck, daß in den Grundgleichungen der elasto-plastischen Körper die Spannungen und Deformationen in keiner unmittelbaren Beziehung mehr stehen. Die Spannungen und Deformationen stehen jetzt in einer Beziehung, die durch ihre Geschwindigkeiten vermittelt wird. Durch Experimente, die in der Literatur beschrieben werden, hat sich gezeigt, daß durch obige Beziehungen das Verhalten von Metallen gut beschrieben wird. Für Gesteine, körnige Werkstoffe oder Beton erweist sich diese Modellierung jedoch als ungeeignet. Die Grundgleichungen beschreiben damit lediglich die Zustandsänderungen der Körper. Aus (3.42) geht außerdem hervor, daß man bei Kenntnis der Spannungen eine eindeutige Beziehung zwischen den Spannungs- und Deformationsgeschwindigkeiten aufstellen kann. Auf Grund dieser Tatsache kann man selbst in einfachen Fällen nur mit großen Schwierigkeiten analytische Lösungen für die Spannungen und Deformationen berechnen, da (3.42) nichtlinear ist. Man kann aber mit (3.42) numerische Berechnungen durchführen. Wenn die Belastung nämlich stufenweise geändert wird, dann sind die bereits zustandegekommenen Spannungen beim Einwirken einer neuen Laststufe bekannt. Damit ist dann der Ausdruck in den eckigen Klammern in (3.42) in jedem Schritt bekannt und aus den Deformationsgeschwindigkeiten können die neuen Spannungsgeschwindigkeiten und dann die neuen Spannungen berechnet werden.

3.5 Thermospannungen

In diesem Abschnitt geht es um Spannungen, die nicht durch äußere Krafteinwirkungen, sondern durch das instationäre Temperaturfeld im Körper verursacht werden. Wird ein Körper, der eine gewisse „Anfangsverzerrung" $\epsilon_{ij}(0)$ und einen gewissen „Anfangsspannungszustand" $\sigma_{ij}(0)$ hat, gleichmäßig erwärmt, dehnt er sich aus. Durch die Erwärmung kommt es jetzt zu Wärmedehnungen ϵ^T, die durch $\epsilon^T = \frac{\triangle l}{l} = \alpha(T - T_0)$ definiert sind. Hier ist α der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient, der i. a. von der Temperatur und dem betreffenden Material abhängt. Die Wärmedehnung beschreibt dabei nicht die Volumendehnung, sondern nur die Dehnung in eine Richtung. Diese Wärmedehnungen überlagern sich mit der vorher vorhandenen Anfangsverzerrung $\epsilon_{ij}(0)$ und es gilt:

$$\epsilon_{ij}(t) = \epsilon_{ij}(0) + \delta_{ij}\epsilon^T(t) \quad . \tag{3.43}$$

Das heißt, nachdem der Körper wieder abgekühlt wurde, hat er wieder dieselbe Verzerrung wie vorher. Der Spannungszustand bleibt von dem ganzen Vorgang unbeeinflußt:

$$\sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(0) \quad .$$

Die Wärmedehnungen wirken dabei nur auf die Normaldehnungen $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}$ und ϵ_{zz}, also auf die Komponenten des Deformationstensors, die für die Volumendehnung zuständig sind. Auf die Winkelverzerrungen $\epsilon_{xy}, \epsilon_{xz}$ und ϵ_{yz} wirkt die Wärmedehnung nicht. Etwas anders gestaltet sich der Sachverhalt, wenn die Wärmedehnungen behindert werden, d. h. wenn der Körper sich nicht ungehindert ausdehnen kann. Eine solche Behinderung kann daraus resultieren, daß der Körper fest eingespannt ist. Sie kann aber auch daher rühren, daß die Wärmedehnung im Körper selbst behindert wird. Dies ist dann der Fall, wenn sich aufgrund eines ungleichmäßigen Temperaturfeldes die einzelnen Bereiche verschieden stark ausdehnen und deshalb aufeinander wie eine Einspannung wirken. Das gleiche Problem tritt auf,wenn der Körper aus verschiedenen Materialien besteht, die unterschiedliche lineare Wärmeausdehnungskoeffizienten α haben. In solchen Fällen entstehen durch die Behinderung der Wärmedehnungen Spannungen.

Bei den bisherigen Betrachtungen und auch im weiteren nehmen wir an, daß sich die Spannungen nur aufgrund der ungleichmäßigen Wärmedehnungen ändern. Die Einflüsse aus Zustandsänderungen und Gefügeumwandlungen sowie aus anderen Ursachen für plastische Deformationen werden nicht berücksichtigt. Außerdem nehmen wir an, daß das Temperaturfeld unabhängig von den sich daraus ergebenden Deformationen ist. Das ist nicht exakt richtig, da die Deformation Wärmeenergie verbraucht bzw. erzeugt und somit das Temperaturfeld beeinflußt. Diese Beeinflussung ist aber so klein, daß sie vernachlässigt werden kann. Da das zeitlich veränderliche Temperaturfeld ein zeitlich veränderliches Spannungsfeld erzeugt, liegt eigentlich ein dynamisches Problem vor. Von Ausnahmen (z. B. Schweißbeginn) abgesehen gehen aber beim Schweißen die Temperaturänderungen so langsam vor sich, daß der Einfluß der Beschleunigungen vernachlässigt werden kann. Die Bewegung wird damit als Aufeinanderfolge von Gleichgewichtslagen angesehen und man spricht von einer quasistatischen Behandlung der Thermospannungen.

Von den Grundgleichungen bleiben im Fall des Temperatureinflusses die drei Gleichgewichtsbeziehungen ($\sigma_{ij,j} + X_i = 0$) und die sechs geometrischen Beziehungen ($\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$) unbeeinflußt. Der Temperatureinfluß wirkt sich nur in einer Modifizierung des Materialgesetzes aus. Im elastischen Fall geht das Hookesche Gesetz in die folgende Form über:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\delta_{ij}\sigma_0\right] + \delta_{ij}\epsilon^T \quad . \tag{3.44}$$

Die Beziehung (3.44) wird als Gesetz von Duhamel-Neumann bezeichnet. Damit hat man folgendes Gleichungssystem, das die Thermoelastizität beschreibt:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \sigma_{ij,j} + X_i &= 0 \\ \epsilon_{ij} &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{ij} - \mu\delta_{ij}\sigma_0\right] + \delta_{ij}\epsilon^T \quad . \end{aligned}$$

Im plastischen Fall bestand im Unterschied zum elastischen Fall keine eindeutige Beziehung zwischen den Spannungen und Deformationen mehr, sondern nur noch zwischen ihren Geschwindigkeiten. In (3.44) muß deshalb nach Addition der plastischen Deformation

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^T$$

bezüglich der Zeit differenziert werden und es ergibt sich:

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\dot{\sigma}_{ij} - \mu\delta_{ij}\dot{\sigma}_0\right] + \eta\Lambda\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right) + \delta_{ij}\alpha\dot{T} \quad . \tag{3.45}$$

Damit hat man folgendes Gleichungssystem, das die Thermoplastizität beschreibt:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ij} &= \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \\
\sigma_{ij,j} + X_i &= 0 \\
\dot{\epsilon}_{ij} &= \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\dot{\sigma}_{ij} - \mu\delta_{ij}\dot{\sigma}_0\right] + \eta\Lambda\left(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0\right) + \delta_{ij}\alpha\dot{T} \\
\Lambda &= \frac{1}{2\tau_F^2}\left[(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0)(\dot{\epsilon}_{ij} - \delta_{ij}\dot{\epsilon}_0)\right] = \frac{1}{2\tau_F^2}s_{ij}\dot{e}_{ij} \\
f &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} - \tau_F^2 \quad .
\end{aligned}$$

3.6 Ebene Probleme

Unter bestimmten Voraussetzungen können der Deformations- und Spannungszustand durch ein einfacheres Modell beschrieben werden:

1. $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(x, y, t)$, das heißt, die Spannungen hängen nur von zwei räumlichen Koordinaten ab.

2. $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$, das heißt, die Tangentialspannungen bezüglich der dritten Koordinate verschwinden.

3. $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = 0$, das heißt, in Richtung der dritten Koordinate tritt keine Scherung auf.

Unter diesen drei Voraussetzungen nennt man den Zustand eines Körpers eben. Das bedeutet also, daß man eine Achse angeben kann (i.a. z), entlang der die Spannungen und Deformationen unabhängig von dieser Koordinate sind und daß gleichzeitig die Schubspannungen und die Winkelverzerrungen in den zu dieser Achse senkrechten Schnitten überall verschwinden. Wenn man außerdem noch annimmt, daß $\epsilon_{zz} = 0$ ist, spricht man vom ebenen Deformationszustand und für $\sigma_{zz} = 0$ vom ebenen Spannungszustand. Der ebene Deformationszustand kann als Modell für die dünne Scheibe aus Abbildung 1.6 benutzt werden, wenn man zusätzlich annimmt, daß die äußeren Belastungen unabhängig von z sind und keine Komponenten in z-Richtung haben. Die dünne Platte aus Abbildung 1.5 kann durch den ebenen Spannungszustand modelliert werden, wenn wir zusätzlich annehmen, daß alle äußeren Kräfte in der Plattenebene wirken. Für elastische Körper ergeben sich nur geringfügige Unterschiede in der Behandlung dieser beiden Modelle. Große Unterschiede gibt es dagegen bei plastischer Deformation.

Im ebenen Deformationszustand gilt $\epsilon_{zz} = 0$; aus der Beziehung

$$\epsilon_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})]$$

für den elastischen Fall folgt damit

$$\sigma_{zz} = \mu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) \quad . \tag{3.46}$$

Damit erhält man die acht Unbekannten $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{xy}, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}, v_x$ und v_y . Zwischen ihnen gelten folgende Beziehungen:

1. Gleichgewichtsbedingungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} + X_x &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xy} + \frac{\partial}{\partial y}\sigma_{yy} + X_y &= 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

2. Zusammenhang Deformationstensor - Verschiebungen

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}u_x \qquad \epsilon_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}u_y \\
\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}u_x + \frac{\partial}{\partial x}u_y\right]
\end{aligned} \tag{3.48}$$

3. Hookesches Gesetz (nur im elastischen Fall)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\left(1-\mu^2\right)\sigma_{xx} - \mu\left(1+\mu\right)\sigma_{yy}\right] \\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\left(1-\mu^2\right)\sigma_{yy} - \mu\left(1+\mu\right)\sigma_{xx}\right] \\
\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \quad .
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Im ebenen Spannungszustand galt $\sigma_{zz} = 0$. Aus dem Hookeschen Gesetz folgt damit die Beziehung

$$\epsilon_{zz} = -\frac{\mu}{E}\left[\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right] \tag{3.50}$$

für ϵ_{zz}. Damit ergibt sich für den ebenen Spannungszustand das System

1. Gleichgewichtsbedingungen (3.47)

2. Zusammenhang Deformationstensor - Verschiebungen (3.48)

3. Hookesches Gesetz (nur im elastischen Fall)

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \mu\sigma_{yy}\right] \\
\epsilon_{yy} &= \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \mu\sigma_{xx}\right] \\
\epsilon_{xy} &= \frac{1}{2G}\sigma_{xy} \quad .
\end{aligned} \tag{3.51}$$

Ebene Plastizität

Die obigen Beziehungen galten im Fall der Elastizität. Jetzt untersuchen wir einen Körper, der sich im ebenen Deformationszustand befindet und sich plastisch verhält. Die Verschiebungen sind damit unabhängig von der z-Koordinate und es gilt:

$$u_x = u_x(x,y) \qquad u_y = u_y(x,y) \qquad u_z = 0$$

Nach (3.38) hat das Stoffgesetz von Prandtl-Reuss jetzt die Form

$$\begin{aligned}
\dot{e}_{xx} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{xx} + \Lambda\cdot s_{xx} \qquad \dot{e}_{xy} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{xy} + \Lambda\cdot s_{xy} \\
\dot{e}_{yy} &= \frac{1}{2G}\dot{s}_{yy} + \Lambda\cdot s_{yy} \qquad \dot{e}_{zz} = \frac{1}{2G}\dot{s}_{zz} + \Lambda\cdot s_{zz} \\
\dot{e}_{xz} &= \dot{s}_{xz} = 0 \qquad \dot{e}_{yz} = \dot{s}_{yz} = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Im plastischen Bereich ist die Fließfunktion Null. Damit gilt im ebenen Deformationszustand

$$\tau_F^2 = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2\right] + \sigma_{xy}^2 \quad .$$

Durch Transformation auf die Spannungshauptachsen ergibt sich daraus im ebenen Deformationszustand

$$\tau_F^2 = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_I-\sigma_{II}\right)^2 + \left(\sigma_{II}-\sigma_{III}\right)^2 + \left(\sigma_{III}-\sigma_I\right)^2\right] \quad .$$

Im ebenen Spannungszustand gilt für die Fließfunktion:

$$\tau_F^2 = \frac{1}{6}\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{xx}^2\right] + \sigma_{xy}^2 \quad ,$$

und nach der Hauptachsentransformation:

$$\tau_F^2 = \frac{1}{6}\left[(\sigma_I - \sigma_{II})^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_I^2\right] \quad . \tag{3.52}$$

Für (3.52) folgt damit weiter:

$$\begin{aligned}
\tau_F^2 &= \frac{1}{6}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}^2 + \sigma_I^2\right] \\
&= \frac{1}{3}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}\right] \\
1 &= \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_F}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma_F}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_I}{\sigma_F}\right)\left(\frac{\sigma_{II}}{\sigma_F}\right) \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Die Fließfunktion f wird also im Koordinatensystem mit den Koordinatenachsen σ_I und σ_{II} durch eine Ellipse entsprechend Abbildung 3.8 dargestellt.

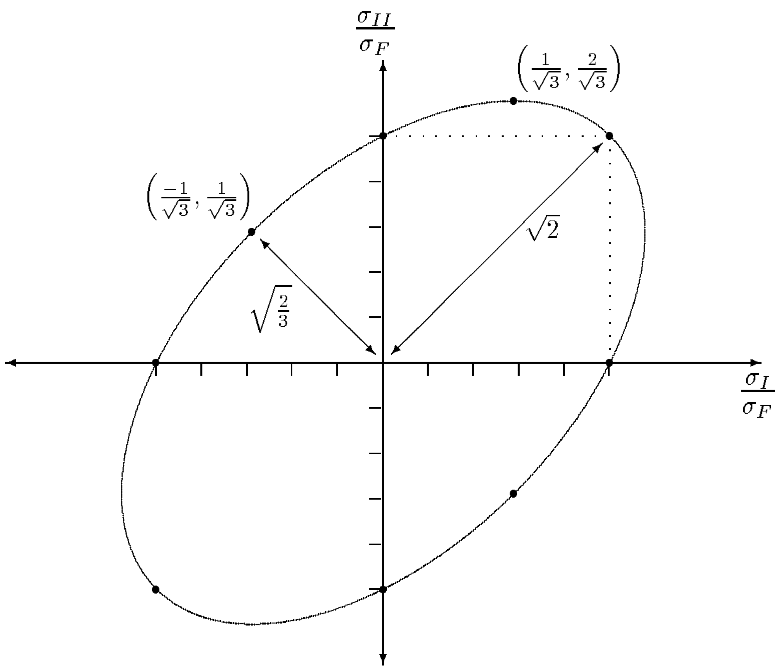


Abbildung 3.8: Ebene Spannung

3.7 Naviersche Gleichungen

Im dreidimensionalen Fall haben wir 15 Gleichungen[5] mit 15 Unbekannten erhalten. Wenn man aus diesen Gleichungen die Spannungen eliminiert, erhält man die Navierschen Gleichungen. Zuerst soll das System für die Thermoelastizität in ein Gleichungssystem für die Verschiebungskomponenten überführt werden. Durch Umstellen von:

$$\epsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\sigma_{xx} - \mu\sigma_0\right] + \alpha(T - T_0) \tag{3.54}$$

nach der Spannung σ_{xx} erhält man:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\mu}\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{1+\mu}\sigma_0 - \frac{\alpha E}{1+\mu}(T - T_0)$$

[5] Das waren 3 Gleichgewichtsbedingungen für die Spannungen, 6 geometrische Beziehungen und 6 Gleichungen für das Materialgesetz.

$$\sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + \frac{\mu}{K(1+\mu)}\epsilon_0 - \frac{\alpha E}{1+\mu}(T-T_0) \quad .$$

Analoge Beziehungen erhält man für die anderen Normalspannungen, für die Tangentialspannungen ergibt sich z. B.:

$$\sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} \quad .$$

In diesen Beziehungen können jetzt die Deformationen durch die Verschiebungen ersetzt werden:

$$\sigma_{xx} = 2G\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\mu}{K(1+\mu)}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial u_k}{\partial x_k} - \frac{\alpha E}{1+\mu}(T-T_0)$$

$$\sigma_{xy} = G\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right) \quad .$$

Mit diesen Beziehungen werden jetzt in den Gleichgewichtsbedingungen (3.25) $\sigma_{ij,j} + X_i = 0$ die Spannungen ersetzt:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\sigma_{xx} &= 2G\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x + \frac{\mu}{K(1+\mu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_z\right) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial T}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial y}\sigma_{xy} &= G\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_x\right) \\
\frac{\partial}{\partial z}\sigma_{xz} &= G\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_x\right) \quad .
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Gleichgewichtsbedingung ergibt dann:

$$\begin{aligned}
2G\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x + \frac{\mu}{K(1+\mu)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_z\right) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial T}{\partial x} \\
+G\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_y + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_x\right) + G\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_z + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_x\right) + X_x = 0 \quad .
\end{aligned}$$

Zusammenfassen der Terme liefert:

$$G\triangle u_x + (G+\lambda)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_x + \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_y + \frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_z\right) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial T}{\partial x} + X_x = 0 \quad .$$

Analog erhält man die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
G\triangle u_y + (G+\lambda)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}u_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u_y + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}u_z\right) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial T}{\partial y} + X_y &= 0 \\
G\triangle u_z + (G+\lambda)\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}u_x + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}u_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u_z\right) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial T}{\partial z} + X_z &= 0 \quad . \qquad (3.55)
\end{aligned}$$

Die Gleichungen (3.55) heißen Naviersche Differentialgleichungen. Sie sind die Verallgemeinerung der Laméschen Dgln. für den Fall der Thermoelastizität. In vektorieller Form hat (3.55) die Gestalt:

$$G\triangle\underline{u} + (G+\lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\underline{u}) - \frac{\alpha E}{1+\mu}\mathrm{grad}T + \underline{X} = \underline{0} \quad . \qquad (3.56)$$

Wie man aus (3.55) bzw. (3.56) ersieht, geht die Belastungsgröße Temperaturfeld in die Laméschen Dgln. wie eine zusätzliche Volumenkraft der Größe $-\frac{\alpha E}{1+\mu}\mathrm{grad}T$ ein.

Im plastischen Fall geht man analog vor. Aber auf Grund der Spezifik des Materialgesetzes müssen die Gleichungen (3.55) jetzt für die zeitlichen Ableitungen der Verschiebungen, also für $\dot{u}_i$, aufgestellt werden. Aus dem Materialgesetz

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\mu)\dot{\sigma}_{ij} - \mu\delta_{ij}\dot{\sigma}_0\right] + \alpha\dot{T}\delta_{ij} + \Lambda\eta s_{ij} \qquad (3.57)$$

erhält man durch Umstellen dieser Beziehungen nach den Spannungen:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E}{1+\mu}\dot{\epsilon}_{ij} + \frac{\mu}{1+\mu}\delta_{ij}\dot{\sigma}_0 - \delta_{ij}\frac{\alpha E}{1+\mu}\dot{T} - \Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij}$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2G\dot{\epsilon}_{ij} + \lambda\delta_{ij}\dot{\epsilon}_0 - \delta_{ij}\frac{\alpha E}{1+\mu}\dot{T} - \Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij} \quad .$$

Jetzt werden wieder die Deformationen durch die Verschiebungen ersetzt:

$$\dot{\sigma}_{ij} = G\left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i}\right) + \lambda\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \dot{u}_k}{\partial x_k} - \delta_{ij}\frac{\alpha E}{1+\mu}\dot{T} - \Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij}$$

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = G\left(\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \lambda\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{ij}\frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij}\right) \quad .$$

Mit diesen Beziehungen werden nun in den Gleichungen (3.28) $\dot{\sigma}_{ij,j} + \dot{X}_i = 0$ die Spannungen ersetzt:

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{G\left(\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) + \lambda\delta_{ij}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x_j \partial x_k} - \delta_{ij}\frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij}\right)\right\} + \dot{X}_i = 0 \quad .$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left\{G\left(\frac{\partial^2 \dot{u}_i}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 \dot{u}_j}{\partial x_i \partial x_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Lambda\eta\frac{E}{1+\mu}s_{ij}\right)\right\} + \lambda\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \dot{u}_k}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \dot{X}_i = 0 \quad .$$

Nach Zusammenfassen ergibt sich:

$$\begin{aligned} & G\triangle\dot{u}_i + (G+\lambda)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\dot{u}_j - \frac{\alpha E}{1+\mu}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \dot{X}_i \\ & = \eta\frac{E}{1+\mu}\sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2\tau_F^2}s_{ij}s_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\dot{u}_k\right) \qquad i = 1,\ldots,3 \quad . \end{aligned} \tag{3.58}$$

Dabei gilt

$$\begin{aligned} s_{ij}(\underline{x},t) &= \int_0^t \dot{s}_{ij}(\underline{x},\theta)\,d\theta + s_{ij}(\underline{x},0) \\ &= \int_0^t \frac{\partial}{\partial\theta}(\sigma_{ij} - \delta_{ij}\sigma_0)\,d\theta + s_{ij}(\underline{x},0) \\ &= \int_0^t G\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}\right) - 2G\delta_{ij}\dot{u}_{k,k}\,d\theta + s_{ij}(\underline{x},0) \quad . \end{aligned} \tag{3.59}$$

Das Differentialgleichungssystem (3.58) ist jetzt die Beziehung, die die plastischen Deformationen beschreibt. Durch Anwendung von Variationsmethoden auf dieses System kann dann eine Formulierung abgeleitet werden, die für eine numerische Berechnung von plastischen Deformationen geeignet ist.

Kapitel 4

Variationsmethoden

4.1 Mathematische Grundlagen

Zuerst sollen einige Definitionen und Sätze zusammengestellt werden, die in diesem Kapitel benötigt werden. Diese Beziehungen werden z. B. in [40] oder [41] dargestellt. Die Lösungen von Differentialgleichungen liegen häufig in speziellen Räumen, den Sobolevräumen. Diese sind Teilräume von L^p -Räumen.

Definition 4.1 *Der Raum L^p über dem Gebiet Ω ist durch die Menge*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u \,:\, \int_\Omega \!\cdots\! \int |u(\underline{x})|^p \, d\underline{x} < \infty \right\} \tag{4.1}$$

definiert, die mit der Norm

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega \!\cdots\! \int |u(\underline{x})|^p \, d\underline{x} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.2}$$

versehen ist. Im L^p sind zwei Funktionen u und v identisch, wenn $u(x) = v(x)$ mit Ausnahme einer Menge vom Maße Null gilt. Der L^p besteht damit aus Äquivalenzklassen von Funktionen.

Definition 4.2 *Wenn es zu einer Funktion $u \in L^1_{loc}$ eine Funktion $w \in L^1_{loc}$ gibt, für die die Gleichung*

$$\int_\Omega \!\cdots\! \int v \cdot w \, d\underline{x} = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega \!\cdots\! \int u \cdot \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \, d\underline{x} \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{4.3}$$

erfüllt ist, heißt $w = D^\alpha u$ schwache Ableitung von u .

Dabei ist α ein Multiindex und D^α eine schwache Ableitung in der Multiindex-Schreibweise.

Definition 4.3 *Die Menge*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{ u \,:\, D^\alpha u \in L^p(\Omega) \quad \forall \alpha \,:\, |\alpha| \le k \} \tag{4.4}$$

versehen mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \!\cdots\! \int |D^\alpha u|^p \, d\underline{x} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{4.5}$$

heißt Sobolevraum.

Die Räume L^p und $W^{k,p}$ sind Banachräume; für $p = 2$ sind sie Hilberträume mit den Skalarprodukten

$$(u,v)_{L^2} = \int_\Omega \!\cdots\! \int u \cdot v \, d\underline{x} \quad \text{und} \tag{4.6}$$

$$(u,v)_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega \!\cdots\! \int D^\alpha u D^\alpha v \, d\underline{x} \quad . \tag{4.7}$$

Es sei H ein Hilbertraum (z. B. $W^{k,2}$) mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$. Den Dualraum zu H bezeichnen wir dann mit H'. Wir betrachten nun die Gleichung $\mathbf{A}u = f$ mit $f \in H'$. Der Operator $\mathbf{A}$ mit dem Definitionsbereich $D(\mathbf{A}) \subset H$ bildet also den Hilbertraum H in sich selbst ab: $\mathbf{A} : H \to H$, wenn $H' \subset H$ gilt[1].

Definition 4.4 *Der Operator* $\mathbf{A}$ *ist*

- *linear, wenn* $\mathbf{A}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathbf{A}(f) + \beta\mathbf{A}(g)$ *gilt;*
- *symmetrisch auf* $D(\mathbf{A})$, *wenn* $(\mathbf{A}u, v) = (u, \mathbf{A}v) \quad \forall u, v \in D(\mathbf{A})$ *ist;*
- *positiv auf* $D(\mathbf{A})$, *wenn* $(\mathbf{A}u, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(\mathbf{A})$ *und* $(\mathbf{A}u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0 \quad ;$
- *positiv definit auf* $D(\mathbf{A})$, *wenn eine positive Konstante* $c > 0$ *existiert, so daß*

$$(\mathbf{A}u, u) \geq c \cdot \|u\|^2 \qquad \textit{ist.}$$

Wir führen nun den Raum H_A ein, der im weiteren eine wichtige Rolle spielen wird.

Definition 4.5 *Der zum Operator* $\mathbf{A}$ *gehörende energetische Raum* H_A *ist die Abschließung des Definitionsbereiches* $D(\mathbf{A})$ *bezüglich der Norm*

$$\|u\|_{H_A} = \Big((\mathbf{A}u, u)_H\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{4.8}$$

d. h. $H_A = \overline{D(\mathbf{A})}^{\|\cdot\|_{H_A}}$.

Die Norm (4.8) wird auch als Energienorm bezeichnet. Der energetische Raum ist Teilmenge eines Sobolevraumes. Falls der Operator $\mathbf{A}$ linear, symmetrisch und positiv definit ist, gilt $H_A \subset H$. Es kann jetzt der folgende Satz formuliert werden.

Satz 4.6 (Satz vom Minimalfunktional) (siehe z. B. [22] oder [25]) *Der lineare Differentialoperator* $\mathbf{A}$ *sei definiert auf der Menge* $D(\mathbf{A})$ *und* $\mathbf{A}$ *sei auf* $D(\mathbf{A})$ *symmetrisch und positiv definit. Dann existiert eine eindeutig bestimmte Funktion* u_0 , *bei der das Funktional* $F(u) = (\mathbf{A}u, u) - 2 \cdot (u, f)$ *sein Minimum für alle möglichen Funktionen* u *aus* H_A *annimmt,*

$$\textit{d. h. } F(u_0) = \min_{u \in H_A} F(u) \quad .$$

Die Funktion u_0 *wird dann als Variationslösung des Problems* $\mathbf{A}u = f$ *bezeichnet.*

Das Minimum des Funktionals F muß nicht unbedingt in $D(\mathbf{A})$ liegen, sondern ist in der größeren Funktionenmenge H_A enthalten. Falls aber die Funktion u_0 in $D(\mathbf{A})$ liegt, dann ist u_0 auch klassische Lösung der Gleichung $\mathbf{A}u = f$.

Häufig ist es sinnvoll, anstelle des Operators $\mathbf{A}$ zu einer Fortsetzung von $\mathbf{A}$ in den Sobolevraum $W^{k,2}$ überzugehen. Durch die Fortsetzung des Ausdrucks $(\mathbf{A}u, v)$ ergibt sich eine auf $W^{k,2} \times W^{k,2}$ definierte Bilinearform, die wir mit $a(\cdot,\cdot)$ bezeichnen wollen.

Definition 4.7 *Die Bilinearform* $a(\cdot,\cdot)$ *sei definiert auf* $V \times V$ *und* V *sei ein Hilbertraum. Sie ist*

- *symmetrisch auf* $V \times V$, *wenn*

$$a(u, v) = a(v, u) \quad \forall u, v \in V \ ;$$

- *stetig (bzw. beschränkt) auf* $V \times V$, *wenn eine Konstante* $c > 0$ *existiert, mit*

$$|a(u, v)| \leq c \cdot \|u\|_V \cdot \|v\|_V \qquad \forall u, v \in V \ ;$$

- *V-elliptisch, falls sie auf* $V \times V$ *stetig ist und ein* $c_0 > 0$ *existiert, so daß*

[1] In der Literatur (z. B. in [41]) wird auch das Skalarprodukt in L^2 betrachtet und $\mathbf{A} : D(\mathbf{A}) \subset L^2 \to L^2$ vorausgesetzt.

$$|a(u,u)| \geq c_0 \cdot \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \;;$$

- *V-koerziv, falls sie auf $V \times V$ stetig ist und k und $c_1 > 0$ existieren, so daß*

$$|a(u,u) + k\|u\|_{L^2}^2| \geq c_1 \cdot \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V \;.$$

Damit kann jetzt der folgende wichtige Satz formuliert werden:

Satz 4.8 (Satz von Lax–Milgram) *Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sei auf V V-elliptisch. Dann existiert in V eine eindeutig bestimmte Funktion u_0, für die gilt:*

$$\forall f \in V' \quad \exists u_0 \in V \quad : \quad a(u_0, v) = (f, v)_V \qquad \forall v \in V \quad . \tag{4.9}$$

Die Funktion u_0 wird als schwache Lösung des Problems $\mathbf{A}u = f$ bezeichnet. Weiterhin existiert der zu $\mathbf{A}$ inverse Operator $\mathbf{A}^{-1}$ und es gilt die Abschätzung

$$\|u_0\|_V = \|\mathbf{A}^{-1}f\|_V \leq \frac{1}{c_0}\|f\|_{V'} \quad . \tag{4.10}$$

Damit erhalten wir die schwache Lösung für ein gegebenes Problem. Für eine Differentialgleichung 2. Ordnung liegt die schwache Lösung i. a. im Raum $W^{1,2}$, in $W_0^{1,2}$ oder in einem Raum zwischen diesen beiden. Die klassische Lösung des entsprechenden Problems liegt dann in $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ für Dirichletrandbedingungen bzw. in $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ für Neumannrandbedingungen. Offenbar ist jede klassische Lösung auch eine schwache Lösung. Aus der Existenz der schwachen Lösung folgt aber nicht die Existenz der klassischen Lösung. Wenn die schwache Lösung aber in dem Teilraum $C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ bzw. $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ liegt, ist sie auch eine klassische Lösung (die bei hinreichend glattem Rand existiert).

Häufig wird der Satz von Lax-Milgram auch in der folgenden Fassung angegeben, die günstiger für die anschließende numerische Umsetzung ist:

Satz 4.9 (Satz von Lax–Milgram) (siehe z. B. [5, Seite 38]) *Die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ sei auf V V-elliptisch. Dann existiert für jede abgeschlossene konvexe Teilmenge von V eine eindeutig bestimmte Funktion u_0, für die das Funktional*

$$F(u) = a(u,u) - 2 < f, u > \tag{4.11}$$

sein eindeutig bestimmtes Minimum annimmt.

Um in den weiteren Untersuchungen keine Sonderfälle betrachten zu müssen, nehmen wir jetzt an, daß das Gebiet Ω beschränkt ist und stückweise glatten Rand besitzt. Außerdem soll der Rand die Kegelbedingung erfüllen, d. h. ein Kegel mit positivem Scheitelwinkel kann so in Ω verschoben werden, daß er jeden Randpunkt berührt.

4.2 Variationsmethoden für parabolische Gleichungen

Variationsmethoden werden für die Lösung elliptischer Differentialgleichungen angewandt. Andere Differentialoperatoren erfüllen nicht die notwendigen Vorraussetzungen für den Satz vom Minimalfunktional oder den Satz von Lax-Milgram. Um das bisher erarbeitete mathematische Gerüst, dem elliptische Operatoren zugrunde liegen, auf einen parabolischen Operator anzuwenden, schlagen wir das folgende Verfahren vor. Dieses Verfahren wird z. B. in [8] und [10] vorgestellt. Wir betrachten die zweidimensionale Wärmeleitungsgleichung

$$c \cdot \varrho \frac{\partial}{\partial t} T - \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right) = Q \quad \text{in } \Omega, t > 0 \tag{4.12}$$

mit der Anfangsbedingung

$$T = T_D(x,y) \qquad \text{in } \Omega \text{ und für } t = 0 \tag{4.13}$$

und der Randbedingung

$$T = 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \quad t > 0 \quad . \tag{4.14}$$

Im Hilbertraum H wird die Differentialgleichung (4.12) mit einer Funktion $v(x,y)$, die der Randbedingung $v=0$ auf $\partial\Omega$ genügt, skalar multipliziert. Weiterhin wird

$$\begin{aligned} -\iint_{\Omega} & v \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \cdot \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \cdot \frac{\partial T}{\partial y}\right)\right] dxdy \\ = \iint_{\Omega} & \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \end{aligned} \tag{4.15}$$

berücksichtigt. Mit Hilfe der Bezeichnungen

$$\begin{aligned} a(T,v) &= \iint_{\Omega} \left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy \\ \left(\frac{\partial T}{\partial t}, v\right) &= \iint_{\Omega} v \cdot \frac{\partial T}{\partial t}\, dxdy \\ (Q,v) &= \iint_{\Omega} v \cdot Q\, dxdy \end{aligned}$$

können wir unser Ausgangsproblem nun folgendermaßen umformulieren: Gesucht wird eine Funktion $T(x,y,t)$ so, daß T für alle t in H liegt, $\frac{\partial T}{\partial t} \in L^2(\Omega)$ gilt und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial t}, v\right) + a(T,v) &= (Q,v) \qquad \forall v \in H \quad \forall t > 0 \text{ und} \\ T &= T_D \qquad \text{für } t = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

erfüllt ist. Das Problem (4.16) wird als stetiges Problem bezeichnet. Mit Hilfe einer FEM wird (4.16) nun in den Ortsvariablen diskretisiert. Damit erhalten wir einen endlichdimensionalen Teilraum V_h von H mit den Basisfunktionen $w_1, \ldots w_N$. Jetzt haben wir ein semidiskretes Problem: Gesucht wird eine Funktion T_h mit $T_h \in V_h \forall t$ und

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial T_h}{\partial t}, v_h\right) + a(T_h, v_h) &= (Q, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \text{ und} \\ \left(T_{h|t=0}, v_h\right) &= (T_D, v_h) \qquad \forall v_h \in V_h \quad . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Wir wählen jetzt den Ansatz

$$T_h = \sum_{i=1}^{N} u_i(t) \cdot w_i(x,y) \tag{4.18}$$

mit den unbekannten Funktionen $u_i(t)$. Gleichung (4.17) sollte für alle Funktionen v_h aus V_h gelten, also auch speziell für die Basisfunktionen. Wenn wir (4.18) und alle Basisfunktionen in (4.17) einsetzen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N}(w_i, w_j)u_i'(t) + \sum_{i=1}^{N} a(w_i, w_j)u_i(t) &= (Q, w_j) \qquad j = 1, \ldots, N, \\ \sum_{i=1}^{N}(w_i, w_j)u_i(0) &= (T_D, w_j) \quad . \end{aligned} \tag{4.19}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} [D] &= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & (w_i, w_j) & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{i,j=1,\ldots,N} \\ [K] &= \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \ldots & a(w_i, w_j) & \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}_{i,j=1,\ldots,N} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\{F\} &= \Big((Q,w_1),\ldots,(Q,w_N)\Big)^T \\
\{U(t)\} &= \Big(u_1(t),\ldots,u_N(t)\Big)^T \\
\{g\} &= \Big((T_D,w_1),\ldots,(T_D,w_N)\Big)^T
\end{aligned}
$$

können wir das semidiskrete Problem wie folgt schreiben:

$$
\begin{aligned}
[D]\{U^{'}(t)\}+[K]\{U(t)\} &= \{F\} \\
[D]\{U(0)\} &= \{g\} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

Dies ist ein System von linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $u_i(t)$. Dieses System kann man zwar analytisch exakt lösen, praktisch ist es aber nur in einfachen Fällen möglich, diese Lösungen auch auszurechnen. Für Rechnungen wird die zeitliche Ableitung deshalb durch geeignete Diskretisierungsverfahren approximiert. Damit kommt man dann zum diskreten Problem. Dieses besteht dann auf jeder Zeitschicht aus einem Gleichungssystem. Im nächsten Abschnitt wird das Variationsfunktional, das die Wärmeleitung beschreibt, konkret ausgerechnet. Um die Schwierigkeiten der obigen Vorgehensweise zu umgehen, werden wir erst bezüglich der Zeit und danach bezüglich des Ortes diskretisieren. Dieses Verfahren wird in der Literatur als Rothe-Methode bezeichnet. Nach [10, Bemerkung 6.7] ergeben sich damit für das hier untersuchte Problem diegleichen FEM-Gleichungen.

4.3 Das Variationsproblem für die Wärmeleitung

In diesem Kapitel soll das Rand-Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung mit variablen Koeffizienten in ein Variationsproblem überführt werden; in eine Aufgabe also, für deren Lösung mit der Methode der Finiten Elemente ein relativ einfaches numerisches Verfahren zur Verfügung steht. Bei der Herleitung beschränken wir uns auf die zweidimensionale Wärmeleitung. Das entsprechende Problem ist ein parabolisches Rand-Anfangswertproblem. Um Variationsmethoden anwenden zu können, muß dieses auf ein elliptisches Problem zurückgeführt werden. Dafür kann man die Methode der Diskretisierung in der Zeit benutzen (siehe Abschnitt 4.2). Wir betrachten die Wärmeleitungsgleichung zu einem festen Zeitpunkt t_k . Für diesen Zeitpunkt hängt die Lösung $T_k(x,y) = T(x,y,t_k)$ nur noch von den Ortskoordinaten ab und wir können das elliptische Teilproblem betrachten, bei dem die Ableitung nach der Zeit mit als „gegebene Funktion“ auf die rechte Seite der Differentialgleichung geschrieben wird. Diese Vorgehensweise wird durch die Ausführungen im vorigen Kapitel gerechtfertigt. Dort wurde gezeigt, wie die zeitliche Ableitung für eine räumliche Diskretisierung erhalten werden kann. Für immer feinere Diskretisierungen können wir eine Folge $T_h^{'} = \sum_{i=1}^{N} u_i^{'}(t)\cdot w_i(x,y)$ erhalten, die gegen die zeitliche Ableitung von $T(x,y,t)$ konvergiert (dies muß im konkret betrachteten Fall natürlich bewiesen werden). Damit erhalten wir folgendes Problem:

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda(x,y,t_k)\cdot\frac{\partial}{\partial x}T_k\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda(x,y,t_k)\cdot\frac{\partial}{\partial y}T_k\right)= \\
&\qquad Q(x,y,t_k)-\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(x,y,t)\cdot\varrho(x,y,t)\cdot T\Big)\right]_{t=t_k} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Die Randbedingungen gehen damit in folgende Form über:

$$
\begin{aligned}
T_k(x,y) &= T_D(x,y,t_k) \qquad \text{auf } S_1 \\
\lambda(x,y,t_k)\frac{\partial}{\partial\nu}T_k(x,y) &= \Phi(x,y,t_k) \qquad \text{auf } S_2 \\
\lambda(x,y,t_k)\cdot\frac{\partial}{\partial\nu}T_k(x,y) &= -\alpha_{_T}(x,y,t_k)\cdot\big(T_k(x,y)-T_{um}(x,y,t_k)\big) \text{ auf } S_3 \quad .
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

Zur Vereinfachung führen wir jetzt die folgenden Bezeichnungen für den Differentialoperator und die rechte Seite ein:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}_k &= \mathbf{A}_k\left(x,y,t_k,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\lambda(x,y,t_k)\cdot\frac{\partial}{\partial x}\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left[\lambda(x,y,t_k)\cdot\frac{\partial}{\partial y}\right] \\
f_k &= f_k\left(x,y,t_k,\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right) = Q(x,y,t_k)-\left[\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(x,y,t)\cdot\varrho(x,y,t)\cdot T\Big)\right]_{t=t_k} \quad .
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

Den Index k lassen wir im folgenden der Einfachheit halber weg. Die Differentialgleichung (4.21) hat damit die Gestalt $\mathbf{A}T = f$. Dieses Problem wollen wir jetzt im Raum $V \subset W^{1,2}$ lösen. Als Raum V definieren wir

$$V \quad = \quad \{u : u \in W^{1,2}(\Omega);\ u = 0 \text{ auf } S_1\} \quad . \tag{4.24}$$

Das heißt, V ist diejenige Menge von Funktionen aus dem Raum $W^{1,2}(\Omega)$, die zusätzlich zu den Glattheitsanforderungen die homogene Dirichlet-Randbedingung aus (4.22) erfüllt. Die Gleichung $\mathbf{A}T = f$ wird nun mit einer Funktion $v \in V$ skalar multipliziert. Damit ergibt sich:

$$\iint\limits_{\Omega} \mathbf{A}T \cdot v \, d\Omega = \iint\limits_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega \quad . \tag{4.25}$$

Durch partielle Integration der linken Seite der Gleichung ergibt sich:

$$\begin{aligned} &= \iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \, dxdy - \int\limits_{S} \lambda \cdot v \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \cdot \cos(\nu, x) \, dS \\ &\quad - \int\limits_{S} \lambda \cdot v \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \cos(\nu, y) \, dS \\ &= \iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial T}{\partial y} \right] dxdy - \int\limits_{S} \lambda \cdot v \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} \, dS \quad . \end{aligned}$$

Das Randintegral über S verschwindet auf dem Rand S_1 , denn auf S_1 ist $v = 0$ da $v \in V$. Auf dem Rand S_2 gilt $\lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} = \Phi$ und auf dem Rand S_3 ist $\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} = -\alpha_T \cdot (T - T_{um})$. Die Randterme, in denen T nicht explizit vorkommt, bringen wir auf die rechte Seite der Gleichung (4.25) und definieren jetzt folgende Bilinearform auf $V \times V$:

$$a_t(u, v) = \iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + \int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot u \cdot v \, dS \quad . \tag{4.26}$$

Die rechte Seite kann als Funktional geschrieben werden:

$$< \chi, v > = \iint\limits_{\Omega} f \cdot v \, d\Omega \quad + \int\limits_{S_2} v \cdot \Phi \, dS + \int\limits_{S_3} \alpha_T v \cdot T_{um} \, dS \tag{4.27}$$

und damit ergibt sich das Variationsproblem

$$a_t(T, v) = < \chi, v > \quad .$$

Wir zeigen jetzt, daß die Bilinearform $a_t(\cdot,\cdot)$ auf $V \times V$ V-elliptisch ist.

Lemma 4.10 *Die Bilinearform $a_t(\cdot,\cdot)$ ist auf $V \times V$ stetig.*

Beweis: Auf Seite 50 haben wir mit $\|\cdot\|_{1,2}$ die Norm in dem Sobolevraum $W^{1,2}(\Omega)$ und mit $\|\cdot\|_2$ die Norm im Raum $L^2(\Omega)$ definiert. Weiterhin seien

$$\begin{aligned} \lambda_m &= \max_{\underline{x} \in \Omega, t > 0} \lambda(x, y, t) \\ \alpha_m &= \max_{\underline{x} \in \Omega, t > 0} \alpha_T(x, y, t) \quad . \end{aligned}$$

Die beiden Konstanten sind also unabhängig vom konkret betrachteten Zeitpunkt t_k . Zu zeigen ist jetzt $\exists c > 0 : |a_t(u, v)| \leq c \cdot \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad :$

$$\begin{aligned} |a_t(u, v)| &= \left| \iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] dxdy + \int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot u \cdot v \, dS \right| \\ &\leq \lambda_m \iint\limits_{\Omega} \left| \frac{\partial v}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \right| + \left| \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right| dxdy + \alpha_m \int\limits_{S_3} |u \cdot v| \, dS \\ &\leq \lambda_m \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial x} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \left\| \frac{\partial v}{\partial y} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) + \alpha_m \|u\|_{L^2(S_3)} \|v\|_{L^2(S_3)} \quad . \end{aligned}$$

Nach dem inversen Spursatz (siehe z. B. [43, Satz 8.8]) gilt nun

$$\|u\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \le c_1 \cdot \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad . \tag{4.28}$$

Damit folgt:

$$\|u\|_{L^2(S_3)} \le c_2\|u\|_{W^{0,2}(\partial\Omega)} \le c_3\|u\|_{W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega)} \le c_4\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \quad .$$

Außerdem gilt

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)} \le c_5\|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}$$

und wir erhalten somit

$$|a_t(u,v)| \le \tilde{c} \cdot \|u\|_{W^{1,2}} \cdot \|v\|_{W^{1,2}} = c \cdot \|u\|_V \cdot \|v\|_V \quad . \tag{4.29}$$

Da aus materialtechnischen Gründen $\lambda_m < \infty$ und $\alpha_m < \infty$ gelten, ist auch $c < \infty$ und damit ist die Stetigkeit von $a_t(\cdot,\cdot)$ bewiesen.

Lemma 4.11 *Die Bilinearform $a_t(\cdot,\cdot)$ ist auf $V \times V$ V-elliptisch.*

Beweis: Es seien

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \min_{\underline{x}\in\Omega, t>0} \lambda(x,y,t) \\ \alpha_0 &= \min_{\underline{x}\in\Omega, t>0} \alpha_T(x,y,t) \quad . \end{aligned}$$

Damit folgt aus (4.26) :

$$a_t(u,u) \ge \min(\lambda_0,\alpha_0) \cdot \left[\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{S_3} u^2\, dS\right] \quad . \tag{4.30}$$

Wir müssen jetzt zwei Fälle unterscheiden: $\text{mes}(S_1+S_3) > 0$ und $\text{mes}(S_1+S_3) = 0$ (d. h. $\partial\Omega = S_2$). Im ersten Fall benutzen wir jetzt die folgende Ungleichung (siehe [40, Satz 28.5]):

$$\left(\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{\Gamma} |u|^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}} \ge \frac{1}{c_1}\|u\|_{1,2} \quad , \tag{4.31}$$

wobei Γ ein beliebiger Teil des Randes mit $\text{mes}(\Gamma) > 0$ ist. Für Γ wählen wir den Rand S_1 (hier gilt $u = 0$) oder den Rand S_3. Weiterhin gilt

$$\begin{aligned} &\left[\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy + \int\limits_{S_3} u^2\, dS\right]^{\frac{1}{2}} \ge \\ &\qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left[\left(\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_{\Gamma} |u|^2\, dS\right)^{\frac{1}{2}}\right] \end{aligned} \tag{4.32}$$

und damit folgt:

$$a_t(u,u) \ge \min(\lambda_0,\alpha_0) \cdot \frac{1}{2c_1^2} \cdot \|u\|_{1,2}^2 = c \cdot \|u\|_{1,2}^2 \ge \hat{c} \cdot \|u\|_2^2 \quad . \tag{4.33}$$

Aus materialtechnischen Gründen sind $\lambda_0 > 0$ und $\alpha_0 > 0$. Ist also $\text{mes}(S_1+S_3) > 0$, dann ist $a_t(\cdot,\cdot)$ auf V V-elliptisch.

Im zweiten Fall ($\partial\Omega = S_2$ bzw. $\text{mes}(S_1+S_3) = 0$) fordern wir zusätzlich noch $\iint\limits_{\Omega} u\, dxdy = 0$, um V-Elliptizität zu erzwingen. Diese Einschränkung ist deshalb sinnvoll, weil im Falle des

Neumannproblems die Lösung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Mit der Ungleichung von Poincaré (siehe [40, Satz 28.4])

$$\left(\iint_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 dxdy\right)^{\frac{1}{2}} + \left|\iint_\Omega u\,dxdy\right| \geq \frac{1}{c_1}\|u\|_{1,2} \tag{4.34}$$

folgt

$$a_t(u,u) \geq \lambda_0 \cdot \frac{1}{2c_1^2} \cdot \|u\|_{1,2}^2 = c \cdot \|u\|_{1,2}^2 \geq c \cdot \|u\|_2^2 \quad . \tag{4.35}$$

Sind also $\lambda_0 > 0\,, \alpha_0 > 0\,, \mathrm{mes}(S_1 + S_3) = 0$ und $\iint_\Omega u\,dxdy = 0$, dann ist $a_t(\cdot,\cdot)$ auf V ebenfalls V-elliptisch. Damit gilt jetzt folgender Satz:

Satz 4.12 *Das Funktional $F(T) = a_t(T,T) - 2 < \chi, T >$ nimmt in V sein eindeutig bestimmtes Minimum an. Das Variationsproblem $a_t(T,v) =< \chi, v > \quad \forall v \in V$ hat in V eine eindeutig bestimmte Lösung.*

Dieser Satz folgt aus den beiden obigen Lemmas und der Anwendung des Satzes von Lax–Milgram.

Berechnung des Funktionals für inhomogene Randbedingungen

Um das Funktional herleiten zu können, führen wir das inhomogene Problem auf ein homogenes zurück. Dazu machen wir jetzt folgende wichtige Vorraussetzung: Es existiere eine hinreichend glatte Funktion $g(x,y)$, die die inhomogenen Randbedingungen aus (4.22) erfüllt. Die Existenz einer solchen Funktion wird zum Schluß gesondert untersucht. Wir wählen jetzt eine solche Funktion g fest aus und setzen $v := T - g$. Die neue unbekannte Funktion $v(x,y)$ genügt dann der Differentialgleichung

$$\mathbf{A}v = \mathbf{A}T - \mathbf{A}g = f - \mathbf{A}g \tag{4.36}$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} v &= T - g = T_D - T_D = 0 \quad \text{auf } S_1 \\ \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} = \Phi - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \quad \text{auf } S_2 \\ \lambda \cdot \frac{\partial v}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot v &= \lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot T - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g \\ &= \alpha_T \cdot T_{um} - \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g \quad \text{auf } S_3 \quad . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Die neue Funktion v genügt also der Differentialgleichung (4.36) und der homogenen Dirichlet-Randbedingung aus (4.37). Da die neue Funktion v in V liegt, können wir auf die Funktion v den Satz von Lax-Milgram anwenden. Das obige Problem für v ist äquivalent zur Suche nach dem Minimum des Funktionals:

$$\tilde{F}(v) = a_t(v,v) - 2 < \chi, v > \quad . \tag{4.38}$$

Das Funktional $< \chi, \cdot >$ hat für v jetzt die Gestalt:

$$\begin{aligned} < \chi, v > &= \iint_\Omega (f - \mathbf{A}g)v\,d\Omega + \int_{S_2} v \cdot \left(\Phi - \lambda\frac{\partial g}{\partial \nu}\right) dS \\ &\quad + \int_{S_3} v \cdot \left(\alpha_T \cdot T_{um} - \lambda\frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g\right) dS \\ &= \iint_\Omega (f - \mathbf{A}g)(T-g)\,d\Omega + \int_{S_2} (T-g) \cdot \left(\Phi - \lambda\frac{\partial g}{\partial \nu}\right) dS \\ &\quad + \int_{S_3} (T-g) \cdot \left(\alpha_T \cdot T_{um} - \lambda\frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g\right) dS \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \; <\chi, T> + \left[-\iint\limits_{\Omega} T\mathbf{A}g \, d\Omega - \int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + \int\limits_{S_3} T \cdot \left(-\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g \right) dS \right] \\
&\quad + \left\{ -\iint\limits_{\Omega} (f - \mathbf{A}g) \cdot g \, d\Omega - \int\limits_{S_2} g \cdot \left(\Phi - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dS \right. \\
&\quad \left. - \int\limits_{S_3} g \cdot \left(\alpha_T \cdot T_{um} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g \right) dS \right\} \quad .
\end{aligned}
$$

Wenn in der Bilinearform $a_t(\cdot, \cdot)$ für v wieder $T - g$ eingesetzt wird, folgt für das Funktional $\tilde{F}$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F} \;&=\; a_t(T,T) - 2 <\chi, T> + \left[-a_t(T,g) - a_t(g,T) + 2\iint\limits_{\Omega} T\mathbf{A}g \, d\Omega + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS \right. \\
&\quad \left. + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS \right] + \left\{ a_t(g,g) + 2\iint\limits_{\Omega} (f - \mathbf{A}g) \cdot g \, d\Omega \right. \\
&\quad \left. + 2\int\limits_{S_2} g \cdot \left(\Phi - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dS + 2\int\limits_{S_3} g \cdot \left(\alpha_T \cdot T_{um} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_T \cdot g \right) dS \right\} \quad . \qquad (4.39)
\end{aligned}
$$

Der Ausdruck in den eckigen Klammern hängt von g und von T ab. Durch partielle Integration wandeln wir diesen Ausdruck in ein Randintegral um:

$$
\begin{aligned}
& -a_t(T,g) - a_t(g,T) + 2\iint\limits_{\Omega} T\mathbf{A}g \, d\Omega + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS \\
&= \; -2\iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right] dx dy - 2\int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot T \cdot g \, dS \\
&\quad + 2\iint\limits_{\Omega} T \cdot \left[-\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(x,y,t_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda(x,y,t_k) \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right) \right] d\Omega \\
&\quad + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS \\
&= \; -2\iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right] dx dy - 2\int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot T \cdot g \, dS \\
&\quad + 2\iint\limits_{\Omega} \lambda \cdot \left[\frac{\partial T}{\partial x} \cdot \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} \cdot \frac{\partial g}{\partial y} \right] dx dy - 2\int\limits_{S} \lambda \cdot T \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS \\
&\quad + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS \quad .
\end{aligned}
$$

Die Volumenintegrale heben sich auf, das Randintegral über S kann unter Verwendung der Randbedingungen weiter umgeformt werden:

$$
\begin{aligned}
& -a_t(T,g) - a_t(g,T) + 2\iint\limits_{\Omega} \mathbf{A}g \cdot T \, d\Omega + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS \\
&= \; -2\int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot T \cdot g \, dS - 2\int\limits_{S_1} \lambda \cdot T_D \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS - 2\int\limits_{S_2} T \cdot \Phi \, dS + 2\int\limits_{S_3} \alpha_T \cdot T \cdot (g - T_{um}) \, dS \\
&\quad + 2\int\limits_{S_2} T \cdot \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS + 2\int\limits_{S_3} T \cdot \left(\lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} + \alpha_T \cdot g \right) dS
\end{aligned}
$$

$$= \quad -2 \int\limits_{S_1} \lambda \cdot T_D \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS \quad .$$

Damit ergibt sich für das Funktional $\tilde{F}$ ein Ausdruck, der in zwei Terme aufgeteilt werden kann, wobei der erste von T und den Randbedingungen und der zweite Term von g und den Randbedingungen abhängt. $\tilde{F}(v)$ hat somit die Form

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(v) \quad = \quad & a_t(T,T) - 2 < \chi, T > + \Bigg\{ a_t(g,g) - \iint\limits_{\Omega} \quad (f - \mathbf{A}g) \cdot g \, d\Omega \\
& - \int\limits_{S_2} g \cdot \left(\Phi - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} \right) dS - \int\limits_{S_3} g \cdot \left(\alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot T_{um} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \nu} - \alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot g \right) dS - 2 \int\limits_{S_1} \lambda \cdot T_D \cdot \frac{\partial g}{\partial \nu} \, dS \Bigg\} \quad .
\end{aligned} \tag{4.40}$$

Die Funktion g war fest gewählt, der Ausdruck in den geschweiften Klammern in (4.40) ist also konstant. Die Bestimmung des Minimums von $\tilde{F}(v)$ ist also äquivalent zu der Bestimmung des Minimums des folgenden Funktionals $F(T)$:

$$\begin{aligned}
F(T) \quad & = \quad a_t(T,T) - 2 < \chi, T > \\
& = \quad \iint\limits_{\Omega} \quad \lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \, dxdy + \int\limits_{S_3} \alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot T^2 \, dS \\
& \qquad -2 \iint\limits_{\Omega} \quad f \cdot T \, d\Omega \quad - 2 \int\limits_{S_2} T \cdot \Phi \, dS - 2 \int\limits_{S_3} \alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot T \cdot T_{um} \, dS \quad .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich das Funktional:

$$\begin{aligned}
F(T) \quad = \quad & \iint\limits_{\Omega} \quad \lambda(x,y) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \lambda(x,y) \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2 \\
& -2 \cdot T \cdot Q + 2 \cdot T \cdot \frac{\partial}{\partial t} \Big(c(x,y) \cdot \varrho(x,y) \cdot T \Big) \, dxdy \\
& - \int_{S_2} 2 \cdot T \cdot \Phi \, dS + \int_{S_3} \alpha_{\scriptscriptstyle T}(x,y) \cdot T \cdot (T - 2 \cdot T_{um}) \, dS \quad ,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

das die Grundlage für numerische Berechnungen von Temperaturfeldern bildet[2].

Bemerkungen

1. Durch Addition des konstanten Integrals $\int_{S_3} \alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot T_{um}^2 \, dS$ erhält man über S_3 das Integral $\int_{S_3} \alpha_{\scriptscriptstyle T} \cdot (T - T_{um})^2 \, dS$. Das durch Benutzung dieses Integrals entstehende Funktional ist zu (4.41) äquivalent.
2. Die Randbedingung auf dem Rand S_1 ist im Funktional nicht mehr enthalten. Dies resultiert aus der Tatsache, daß es sich hier um eine wesentliche Randbedingung handelt. Sie muß durch die Wahl der Funktionen, über die variiert wird, a priori erfüllt werden.
3. Die Existenz und Eindeutigkeit des Minimums von (4.41) im Raum V wird durch die V-Elliptizität der Bilinearform $a_t(\cdot,\cdot)$ gesichert.

Existenz einer Funktion, die die Randbedingungen erfüllt

Das Funktional (4.41) kann gebildet werden, ohne die Funktion $g(x,y)$ zu kennen, die zweimal stetig differenzierbar ist und die inhomogenen Randbedingungen erfüllt. Die Existenz einer solchen Funktion muß gesichert sein, damit (4.41) sinnvoll ist. Die Existenz einer solchen Funktion

[2] Dieses Funktional wird auch in der Literatur angegeben, z. B. in [7, Seite 73] oder [36, Seite 70 ff.]. Dort wird das Funktional allerdings nicht hergeleitet und es fehlt die Angabe der Vorraussetzungen, unter denen die Temperaturfelder damit berechnet werden können.

für (4.22) ist gesichert, wenn die Randbedingungen von jedem Randpunkt aus zweimal stetig differenzierbar in das Innere von V fortgesetzt werden können. Um das zu zeigen, kann man ein dem Randwertproblem entsprechendes Modellproblem untersuchen (zur Rückführung auf dieses Problem siehe z. B. [9]). Dazu betrachten wir einen unendlichen Keil (siehe Abbildung 4.1). Auf den beiden Rändern Γ_1 und Γ_2 sind zwei Randbedingungen gegeben.

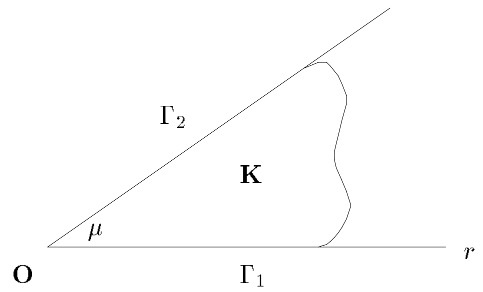


Abbildung 4.1: Unendlicher Keil

Gibt es jetzt eine im Keil K zweimal stetig differenzierbare Funktion $h(r,\beta)$, die auf den beiden Schenkeln Γ_i die Randbedingungen annimmt? Für die Kombination der drei Randbedingungen gibt es jetzt sechs Möglichkeiten, die untersucht werden müssen. Falls z. B. auf beiden Rändern Dirichletrandbedingungen vorgegeben sind,

$$\begin{aligned} h(r,\beta) &= p(r) \text{ auf } \Gamma_1 \\ h(r,\beta) &= q(r) \text{ auf } \Gamma_2 \\ &\quad \text{erfüllt die Funktion} \\ h(r,\beta) &= \frac{\beta}{\mu}\cdot q(r) + \frac{\mu-\beta}{\mu}\cdot p(r) \end{aligned}$$

die Bedingung, falls $p(r)$ und $q(r)$ bezüglich r zweimal stetig differenzierbar sind und $p(0) = q(0)$ gilt. In [9] wurde allgemein bewiesen, daß es immer eine Fortsetzung h mit $h \in W^{1,2}(\Omega)$ gibt (diese Bedingung an h ist hinreichend), falls im Eckpunkt von den Randbedingungen die Werte der Funktion selbst, die Werte der Ableitung in Normalenrichtung und die Werte der Ableitung in Tangentialrichtung übereinstimmen (siehe [9, Th.15.28 S.50]). Um dieses Modellproblem wieder auf das Gebiet Ω anwenden zu können, wird die Funktion $h(r,\beta)$ mit der Abschneidefunktion θ multipliziert. Die Fortsetzbarkeit der Randbedingungen bleibt dabei aber erhalten, so daß damit die Existenz der Funktion g(x,y) gesichert ist.

Nichtlineare Wärmeleitung

Die obige Vorgehensweise beruht darauf, daß im Funktional F in Gleichung (4.39) die Funktionen T und g entkoppelt werden konnten. Dies ist aber nur bei variablen Koeffizienten $\lambda(x,y)$ möglich, nicht bei nichtlinearen Koeffizienten $\lambda(T)$. Das Volumenintegral in (4.40) wird dann nicht mehr Null, sondern hat die Gestalt

$$\iint\limits_{\Omega} \lambda(T)\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right]-\lambda(g)\cdot\left[\frac{\partial T}{\partial x}\cdot\frac{\partial g}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\cdot\frac{\partial g}{\partial y}\right]dxdy \quad , \tag{4.42}$$

welche i. a. nicht mehr entkoppelt werden kann. Das bedeutet, daß diese Vorgehensweise für die nichtlineare Wärmeleitungsgleichung nicht mehr anwendbar ist.

In dem Fall, daß man sich nur für die stationäre Lösung der Wärmeleitungsgleichung intersiert (also $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), kann man bei nichtlinearer Wärmeleitung folgendermaßen vorgehen. Man definiert die Abbildung K durch

$$K(T) = \int_0^T \lambda(\theta)\, d\theta$$

und die Funktion w durch die Verkettung von T mit K :

$$w = K(T) \quad .$$

Dann gilt

$$\operatorname{grad} w = \lambda(T) \cdot \operatorname{grad} T \quad .$$

Wenn man jetzt zeigen kann, daß die Abbildung K auf $D(\mathbf{A})$ eineindeutig und stetig ist und das Variationsproblem $a(w,v) = b(v)$ mit

$$a(w,v) = \int_\Omega \operatorname{grad} w \operatorname{grad} v \, d\underline{x}$$

für alle $v \in W^{1,2}$ eindeutig lösbar ist, dann erhält man eine eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems für die nichtlineare Wärmeleitung durch $T = K^{-1} \circ w$.

4.4 Das Variationsproblem im elastischen Fall

Wir werden nun das Variationsproblem für die Verschiebungen bei elastischer Deformation untersuchen. Im elastischen Fall gilt für die Fließfunktion $f < 0$ und damit $\Lambda = 0$. Also gilt $\eta = 0$. Das Ausgangsproblem (3.58) nimmt somit die Gestalt

$$G \triangle \dot{u}_i + (G+\lambda) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \dot{u}_j - \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \dot{X}_i = 0 \qquad i = 1, \ldots, 3 \tag{4.43}$$

an, bzw. in Vektorform

$$G \triangle \underline{\dot{u}} + (G+\lambda) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \underline{\dot{u}}) = \frac{\alpha E}{1+\mu} \operatorname{grad} \dot{T} - \underline{\dot{X}} \quad .$$

Im Hilbertraum $L^2(\Omega)$ werden diese Gleichungen jetzt mit einer Funktion $v = (v_x, v_y, v_z)$ skalar multipliziert. Für die erste Gleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \iint_\Omega \; & G \triangle \dot{u}_x \cdot v_x + (G+\lambda) \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{u}_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \dot{u}_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \dot{u}_z \Big) \cdot v_x d\Omega \\ = \iint_\Omega \; & \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x} \cdot v_x - \dot{X}_x \cdot v_x d\Omega \quad . \end{aligned}$$

Durch partielle Integration werden nun die zweiten Ableitungen auf die Testfunktion v übertragen:

$$\begin{aligned} & \iint_\Omega \; G \triangle \dot{u}_x \cdot v_x + (G+\lambda) \Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \dot{u}_x + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \dot{u}_y + \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \dot{u}_z \Big) \cdot v_x d\Omega = \\ = & \iint_\Omega \; -G \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big) - (G+\lambda) \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} G \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial y} l_y + \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial z} l_z \Big) v_x + (G+\lambda) \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} l_y + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} l_z \Big) v_x d(\partial\Omega) \\ = & \iint_\Omega \; -G \cdot \operatorname{grad} \dot{u}_x \cdot \operatorname{grad} v_x - (G+\lambda) \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} \frac{\partial v_x}{\partial z} \Big) d\Omega \\ & + \int_{\partial\Omega} G \frac{\partial \dot{u}_x}{\partial \nu} v_x + (G+\lambda) \Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x} l_x + \frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x} l_y + \frac{\partial \dot{u}_z}{\partial x} l_z \Big) \cdot v_x d(\partial\Omega) \quad . \end{aligned} \tag{4.44}$$

Analoge Gleichungen ergeben sich bei skalarer Multiplikation der zweiten Gleichung in (4.43) mit v_y und der dritten mit v_z . Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$\iint_\Omega \; -G \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - (G+\lambda) \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} d\Omega +$$

$$+\int_{\partial\Omega} G\left(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial\nu}v_x+\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial\nu}v_y+\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial\nu}v_z\right)+(G+\lambda)\Big(\frac{\partial \dot{u}_x}{\partial x}l_x v_x+\frac{\partial \dot{u}_y}{\partial x}l_y v_x+\cdots+\frac{\partial \dot{u}_z}{\partial z}l_z v_z\Big)d(\partial\Omega)$$

$$=\iint_\Omega \frac{\alpha E}{1+\mu}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i}v_i-\dot{X}_i v_i d\Omega \quad .$$

Damit kann jetzt die folgende Bilinearform definiert werden:

$$a_e(\underline{\phi},\underline{\psi})=\iint_\Omega G\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_i}{\partial x_j}+(G+\lambda)\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\psi_j}{\partial x_i}d\Omega \quad . \tag{4.45}$$

Wir benötigen nun einen geeigneten Raum, in dem die Eigenschaften der Bilinearform $a_e(\cdot,\cdot)$ bewiesen werden. Dafür definieren wir jetzt den Raum X .

Definition 4.13 *Definition des Raumes X :*

- $X=\{\underline{\phi}:\Omega\to\mathbb{R}^3;\phi_i\in W^{1,2}(\Omega);\phi_i=0\ auf\ S_6\ \}$;
- $X_0=\{\underline{\phi}\in X:\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}=0\quad\forall i,j=1,2,3\}$;
- $X=X_0\oplus X_0^\perp$;
- $||\underline{\phi}||_X=\sum_{i=1}^{3}||\phi_i||_{1,2}$.

Satz 4.14 (Kornsche Ungleichung) (siehe z. B. [44e, S. 248])

Es gelte: 1. Ω *sei ein beschränktes Gebiet im* $\mathbb{R}^3$ *mit* $\partial\Omega\in C^{0,1}$
2. $\partial\Omega=S_6\uplus S_7$.

Dann folgt: 1. $\exists c_1>0$ *so, daß*

$$\int_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\right)\right]^2 d\Omega\ge c_1||\underline{\phi}||_X^2\quad\forall\underline{\phi}\in X_0^\perp \quad . \tag{4.46}$$

2. *Falls* $S_6\neq\emptyset$, *gilt* (4.46) $\forall\underline{\phi}\in X$.

Lemma 4.15 *Die Bilinearform* $a_e(\cdot,\cdot)$ *ist auf der Menge X symmetrisch und es existiert ein* $c>0$, *so daß* $a_e(\underline{\phi},\underline{\phi})\ge c\cdot||\underline{\phi}||^2$ *auf X gilt*[3].

Beweis: Die Symmetrie folgt aus der Definition von $a_e(\cdot,\cdot)$. Somit bleibt $a_e(\underline{\phi},\underline{\phi})\ge c\cdot||\underline{\phi}||^2$ zu zeigen:

$$a_e(\phi,\phi)=\iint_\Omega G\sum_{i,j=1}^{3}(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j})^2+(G+\lambda)\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}d\Omega \quad . \tag{4.47}$$

Die Bilinearform $a_e(\phi,\phi)$ kann jetzt nach unten abgeschätzt werden, indem $\min\big(G,G+\lambda\big)$ vor das Integral gezogen wird:

$$a_e(\phi,\phi)\ge\min\big(G,G+\lambda\big)\iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\right)^2+\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}d\Omega \quad . \tag{4.48}$$

Dieses Integral kann jetzt umgeformt werden zu:

$$a_e(\phi,\phi)\ge\min\big(G,G+\lambda\big)\iint_\Omega \sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{2}\Big(\frac{\partial\phi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\phi_j}{\partial x_i}\Big)^2 d\Omega \quad . \tag{4.49}$$

Damit hat das Integral genau die Struktur, die in der Kornschen Ungleichung vorliegt und es gilt: es existiert $c_1>0$ so, daß

$$a_e(\phi,\phi)\ge\min\big(G,(G+\lambda)\big)\cdot c_1\cdot||\underline{\phi}||^2\quad\text{ist.} \tag{4.50}$$

Im Falle $\min\big(G,(G+\lambda)\big)>0$ gilt also:

$$a_e(\phi,\phi)\ge c\cdot||\underline{\phi}||_X^2 \quad . \tag{4.51}$$

[3] Das heißt, $a_e(\cdot,\cdot)$ ist auf X V-elliptisch oder besser gesagt X-elliptisch.

Lemma 4.16 *Die Bilinearform $a_e(\cdot,\cdot)$ ist auf $X \times X$ stetig.*

Beweis: Zu zeigen ist: es existiert $c > 0 : |a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi})| \leq c \cdot \|\underline{\phi}\|_X \cdot \|\underline{\psi}\|_X$:

$$\left|a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi})\right| = \left|\int_\Omega G \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + (G+\lambda)\sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\, d\Omega\right| \tag{4.52}$$

$$\leq \int_\Omega G \cdot \sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\right| + (G+\lambda)\sum_{i,j=1}^{3} \left|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\right| d\Omega \quad . \tag{4.53}$$

Die obige Gleichung ergibt sich durch Anwendung der Beziehung $|\int_\Omega f(x)\,dx| \leq \int_\Omega |f(x)|\,dx$ und der Dreiecksungleichung. Auf die einzelnen Summanden kann jetzt die Schwarzsche Ungleichung angewandt werden und wir erhalten:

$$\left|a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi})\right| \leq G \left(\sum_{i,j=1}^{3} \|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\|_{L^2} \cdot \|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\|_{L^2}\right) + (G+\lambda)\left(\sum_{i,j=1}^{3} \|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\|_{L^2} \cdot \|\frac{\partial \psi_j}{\partial x_i}\|_{L^2}\right) \quad . \tag{4.54}$$

Wegen

$$\|\frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}\|_{L^2} \leq \|\phi_i\|_{W^{1,2}} \leq \|\underline{\phi}\|_X \qquad \forall i,j = 1,2,3$$

folgt:

$$\left|a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi})\right| \leq \max(G, G+\lambda) \cdot \|\underline{\phi}\|_X \cdot 2 \sum_{i,j=1}^{3} \|\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}\|_{L^2} \tag{4.55}$$

$$\leq 2\max(G, G+\lambda)\|\underline{\phi}\|_X \|\underline{\psi}\|_X \quad . \tag{4.56}$$

Damit kann nun der folgende Satz formuliert werden:

Satz 4.17 *Das Variationsproblem $a_e(\underline{\dot{u}}, \underline{v}) =< \underline{f}, \underline{v} > \quad \underline{v} \in X, \underline{f} \in X'$ hat im Raum X eine eindeutig bestimmte Lösung. Das Funktional $F(\underline{\dot{u}}) = a_e(\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{u}}) - 2 < \underline{f}, \underline{\dot{u}} >$ mit $\underline{f} \in X'$ nimmt in X sein eindeutig bestimmtes Minimum an.*

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus $a_e(\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{u}}) \geq c \cdot \|\underline{\dot{u}}\|_X^2$ und $a_e(\underline{\dot{u}}, \underline{v}) \leq c_1 \cdot \|\underline{\dot{u}}\|_X \cdot \|\underline{v}\|_X$ durch Anwendung des Satzes von Lax-Milgram. Die zweite Aussage folgt aus $a_e(\underline{\dot{u}}, \underline{\dot{u}}) \geq c \cdot \|\underline{\dot{u}}\|_X^2$ und der Symmetrie von $a_e(\cdot,\cdot)$ durch Anwendung des Satzes vom Minimum des quadratischen Funktionals.

4.5 Das Variationsproblem für die plastischen Spannungen

Im plastischen Fall gilt für die Fließfunktion $f = 0$ und damit für den Parameter $\eta = 1$. Damit kommen auf der rechten Seite der Gleichung (4.43) die Terme

$$\ldots = \frac{E}{1+\mu}\eta \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij}s_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\dot{u}_k\right) \qquad i = 1,\ldots,3$$

dazu. Bei der skalaren Multiplikation mit einer Funktion $\underline{v} \in \left(L^2(\Omega)\right)^3$ ergibt sich:

$$\ldots = \int_\Omega\!\!\cdots\!\!\int \frac{E}{1+\mu}\eta \sum_{j,k,l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij}s_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\dot{u}_k\right) v_i\, d\Omega \qquad i = 1,\ldots,3 \quad .$$

Nach partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned} \ldots \quad = \quad & \int_\Omega\!\!\cdots\!\!\int \frac{-E}{1+\mu}\eta \sum_{j,k,l=1}^{3} \left(\frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij}s_{kl}\frac{\partial}{\partial x_l}\dot{u}_k\right)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\, d\Omega \\ & + \int\!\!\int_{\partial\Omega} \eta\frac{E}{1+\mu} \sum_{j,k,l=1}^{3} \left(\frac{1}{2\tau_F^2} s_{ij}s_{kl}\cos(\nu, x_l)\dot{u}_k\right) v_i\, d(\partial\Omega) \qquad i = 1,\ldots,3 \quad . \end{aligned}$$

Damit definieren wir jetzt die folgende Bilinearform:

$$a_p(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = \iint_\Omega \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2\tau_F^2} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} s_{ij} s_{kl} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l}\, d\Omega \quad . \tag{4.57}$$

In der Bilinearform (4.57) sind also die Terme enthalten, die im plastischen Fall zusätzlich zu $a_e(\cdot,\cdot)$ auftreten. Die Formulierung des plastischen Problems lautet somit

$$a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi}) + \eta a_p(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = < \underline{f}, \underline{\psi} > \quad . \tag{4.58}$$

Lemma 4.18 *Die Bilinearform $a_e + a_p(\cdot,\cdot)$ kann in jedem Punkt $x \in \Omega$ durch*

$$\begin{aligned} a_e + a_p \quad &= \iint_\Omega G \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + (G+\lambda) \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} d\Omega \\ &+ \iint_\Omega \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2\tau_F^2} \sum_{i,k=1}^{3} s_{ii} s_{kk} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_k}\, d\Omega \end{aligned} \tag{4.59}$$

dargestellt werden.

Beweis: In jedem Punkt x kann eine Hauptachsentransformation für den Spannungsdeviator durchgeführt werden. Dieser hat danach folgende Gestalt:

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & 0 \\ 0 & s_{22} & 0 \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix} \quad .$$

Durch Einsetzen in $a_e + a_p(\cdot,\cdot)$ ergibt sich dann die Darstellung (4.59).

Lemma 4.19 *Der zur Bilinearform $a_e + a_p(\cdot,\cdot)$ gehörende Differentialoperator ist i.a. nicht elliptisch.*

Beweis: Analog zu obigem Lemma kann die Differentialgleichung (3.58) in jedem Punkt auf die Gestalt

$$\begin{aligned} &G \triangle \dot{u}_i + (G+\lambda) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \dot{u}_j - \frac{\alpha E}{1+\mu} \frac{\partial \dot{T}}{\partial x_i} + \dot{X}_i \\ &= \eta \frac{E}{1+\mu} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2\tau_F^2} s_{ii} s_{kk} \frac{\partial}{\partial x_k} \dot{u}_k \right) \qquad i = 1, \ldots, 3 \end{aligned}$$

gebracht werden. Mit der Abkürzung

$$\beta_i = \frac{1}{\tau_F} s_{ii}$$

hat der Hauptteil dieses Differentialoperators für $\eta = 1$ die Gestalt

$$B^H(\underline{x}) = \begin{pmatrix} b_{11}^H(\underline{x}) & b_{12}^H(\underline{x}) & b_{13}^H(\underline{x}) \\ b_{21}^H(\underline{x}) & b_{22}^H(\underline{x}) & b_{23}^H(\underline{x}) \\ b_{31}^H(\underline{x}) & b_{32}^H(\underline{x}) & b_{33}^H(\underline{x}) \end{pmatrix} \tag{4.60}$$

mit

$$\begin{aligned} b_{11}^H(\underline{x}) \quad &= \quad G\triangle + (G+\lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2} \beta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\ b_{12}^H(\underline{x}) \quad &= \quad (G+\lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2} \beta_1 \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ b_{13}^H(\underline{x}) \quad &= \quad (G+\lambda) \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2} \beta_1 \beta_3 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{21}^H(\underline{x}) &= (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2\beta_1\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} \\
b_{22}^H(\underline{x}) &= G\triangle + (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2^2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \\
b_{23}^H(\underline{x}) &= (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2\beta_3\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \\
b_{31}^H(\underline{x}) &= (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3\beta_1\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} \\
b_{32}^H(\underline{x}) &= (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3\beta_2\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_2} \\
b_{33}^H(\underline{x}) &= G\triangle + (G+\lambda)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad .
\end{aligned}$$

Nach [43, S. 143] ist der Differentialoperator elliptisch, wenn das Hauptteilpolynom

$$B^H(\underline{x},\xi) = \sum_{|r|=2} b_r(\underline{x})\xi^r \quad \xi \in \mathbb{R}^3, \underline{x} \in \overline{\Omega}$$

ungleich Null ist für alle $\xi \neq 0$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
B^H(\underline{x},\xi) = {} & G(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) + (G+\lambda)\xi_1^2 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_1^2\xi_1^2 + (G+\lambda)\xi_1\xi_2 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_1\beta_2\xi_1\xi_2 + \\
& (G+\lambda)\xi_1\xi_3 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_1\beta_3\xi_1\xi_3 + (G+\lambda)\xi_2\xi_1 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2\beta_1\xi_2\xi_1 + \\
& G(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) + (G+\lambda)\xi_2^2 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2^2\xi_2^2 + (G+\lambda)\xi_2\xi_3 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_2\beta_3\xi_2\xi_3 + \\
& (G+\lambda)\xi_3\xi_1 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3\beta_1\xi_3\xi_1 + (G+\lambda)\xi_3\xi_2 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3\beta_2\xi_3\xi_2 + \\
& G(\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) + (G+\lambda)\xi_3^2 - \frac{E}{1+\mu}\frac{1}{2}\beta_3^2\xi_3^2 \quad .
\end{aligned}$$

Um zu entscheiden, ob $B^H(\underline{x},\xi)$ für bestimmte ξ verschwindet, bestimmen wir die Determinante der Matrix des Hauptteilpolynoms. Vorher dividieren wir $B^H(\underline{x},\xi)$ noch durch $G \neq 0$ und setzen $\frac{G+\lambda}{G} = \alpha$:

$$\begin{aligned}
|B^H(\underline{x},\xi)| : G = {} & ((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) - \alpha\xi_1^2 + \beta_1^2\xi_1^2)((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) - \alpha\xi_2^2 + \beta_2^2\xi_2^2)((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) \\
& -\alpha\xi_3^2 + \beta_3^2\xi_3^2) + 2(\alpha - \beta_1\beta_2)\xi_1\xi_2(\alpha-\beta_2\beta_3)\xi_2\xi_3(\alpha-\beta_3\beta_1)\xi_3\xi_1 \\
& -(\alpha-\beta_1\beta_2)^2\xi_1^2\xi_2^2((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) - \alpha\xi_3^2 + \beta_3^2\xi_3^2) \\
& -(\alpha-\beta_1\beta_3)^2\xi_1^2\xi_3^2((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) - \alpha\xi_2^2 + \beta_2^2\xi_2^2) \\
& -(\alpha-\beta_2\beta_3)^2\xi_2^2\xi_3^2((\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2) - \alpha\xi_1^2 + \beta_1^2\xi_1^2) \quad .
\end{aligned}$$

Durch Umordnen und Zusammenfassen ergibt sich daraus:

$$\begin{aligned}
\ldots = {} & (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^3 + \\
& (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^2\left[(\alpha-\beta_1^2)\xi_1^2 + (\alpha-\beta_2^2)\xi_2^2 + (\alpha-\beta_3^2)\xi_3\right] + \\
& (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\left[(\alpha-\beta_1^2)(\alpha-\beta_2^2)\xi_1^2\xi_2^2 + (\alpha-\beta_1^2)(\alpha-\beta_3^2)\xi_1^2\xi_3^2 + (\alpha-\beta_2^2)(\alpha-\beta_3^2)\xi_2^2\xi_3^2\right. \\
& \quad \left.-(\alpha-\beta_1\beta_2)^2\xi_1^2\xi_2^2 + (\alpha-\beta_1\beta_3)^2\xi_1^2\xi_3^2 + (\alpha-\beta_2\beta_3)^2\xi_2^2\xi_3^2\right] + \\
& \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2\left[(\alpha-\beta_1^2)(\alpha-\beta_2^2)(\alpha-\beta_3^2) + 2(\alpha-\beta_1\beta_2)(\alpha-\beta_1\beta_3)(\alpha-\beta_2\beta_3)\right. \\
& \left.-(\alpha-\beta_1^2)(\alpha-\beta_2\beta_3)^2 - (\alpha-\beta_2^2)(\alpha-\beta_1\beta_3)^2 - (\alpha-\beta_3^2)(\alpha-\beta_1\beta_2)^2\right] \\
= {} & (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^3 + \\
& (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)^2\left[-\beta_1^2\xi_1^2 - \beta_2^2\xi_2^2 - \beta_3^2\xi_3^2\right] + \\
& (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)(-\alpha)\left[(\beta_1-\beta_2)^2\xi_1^2\xi_2^2 + (\beta_2-\beta_3)^2\xi_2^2\xi_3^2 + (\beta_3-\beta_1)^2\xi_1^2\xi_3^2\right] + \\
& \xi_1^2\xi_2^2\xi_3^2 \cdot 0 \\
= {} & (\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2)\left[(1+\alpha-\beta_1^2)\xi_1^4 + (1+\alpha-\beta_2^2)\xi_2^4 + (1+\alpha-\beta_3^2)\xi_3^4 + (2(1+\alpha)\right. \\
& -\beta_2^2 - \beta_1^2 - \alpha(\beta_1-\beta_2)^2)\xi_1^2\xi_2^2 + (2(1+\alpha) - \beta_1^2 \\
& \left.-\beta_3^2 - \alpha(\beta_1-\beta_3)^2)\xi_1^2\xi_3^2 + (2(1+\alpha) - \beta_2^2 - \beta_3^2 - \alpha(\beta_2-\beta_3)^2)\xi_2^2\xi_3^2\right] \quad . \qquad (4.61)
\end{aligned}$$

Jetzt muß untersucht werden, wann das biquadratische Polynom in den eckigen Klammern verschwindet. Dazu dient das folgende Lemma.

Lemma 4.20 *Das biquadratische Polynom*

$$Ax^4 + By^4 + Cz^4 + 2cx^2y^2 + 2bx^2z^2 + 2ay^2z^2 \tag{4.62}$$

ist ungleich Null $\forall(x,y,z) \neq \underline{0}$, *wenn die 4 Ungleichungen*

$$\begin{aligned} BA > c^2 \quad , \qquad CA &> b^2 \quad , \qquad BC > a^2 \quad , \\ ABC + 2abc &> Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 \end{aligned} \tag{4.63}$$

erfüllt sind.

Beweis: Wir formen das Polynom (4.62) so um, daß es in Summanden ungleich Null zerlegt wird. Dazu spalten wir ein vollständiges Quadrat ab, in dem die gemischten Terme für x bereits mit enthalten sind:

$$\begin{aligned} & Ax^4 + By^4 + Cz^4 + 2cx^2y^2 + 2bx^2z^2 + 2ay^2z^2 \\ = \; & A\left(x^2 + \frac{c}{A}y^2 + \frac{b}{A}z^2\right)^2 + \left(B - \frac{c^2}{A}\right)y^4 + \left(C - \frac{b^2}{A}\right)z^4 + 2\left(a - \frac{bc}{A}\right)y^2z^2 \quad . \end{aligned}$$

Der erste Summand ist jetzt positiv für $(x,y,z) \neq \underline{0}$. Der zweite und dritte Summand sind nichtnegativ für $BA > c^2$ und $CA > b^2$. Damit die Summe aus den Summanden Zwei bis Vier nichtnegativ ist, muß

$$\left(B - \frac{c^2}{A}\right)\left(C - \frac{b^2}{A}\right) > \left(a - \frac{cb}{A}\right)^2$$

gelten. Daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} BC - \frac{Cc^2}{A} - \frac{Bb^2}{A} + \frac{c^2b^2}{A^2} &> a^2 - \frac{2abc}{A} + \frac{c^2b^2}{A^2} \\ ABC + 2abc &> Aa^2 + Bb^2 + Cc^2 \quad . \end{aligned}$$

Vom Polynom (4.62) kann analog ein vollständiges Quadrat abgespalten werden, das die gemischten Terme für y oder z mit enthält. Daraus ergibt sich dann, daß das Polynom (4.62) positiv $\forall(x,y,z) \neq \underline{0}$ ist, wenn die Ungleichungen (4.63) erfüllt sind.

Jetzt untersuchen wir, ob (4.63) für (4.61) erfüllt ist. Es ist

$$\begin{aligned} A &= \left(1 + \alpha - \beta_1^2\right) \\ B &= \left(1 + \alpha - \beta_2^2\right) \\ C &= \left(1 + \alpha - \beta_3^2\right) \\ 2a &= \left(2(1+\alpha) - \beta_2^2 - \beta_3^2 - \alpha(\beta_2 - \beta_3)^2\right) \\ 2b &= \left(2(1+\alpha) - \beta_1^2 - \beta_3^2 - \alpha(\beta_1 - \beta_3)^2\right) \\ 2c &= \left(2(1+\alpha) - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \alpha(\beta_1 - \beta_2)^2\right) \quad . \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned} BA &> c^2 \\ 4(1 + \alpha - \beta_2^2)(1 + \alpha - \beta_1^2) &> \left(2(1+\alpha) - \beta_1^2 - \beta_2^2 - \alpha(\beta_1 - \beta_2)^2\right)^2 \quad . \end{aligned} \tag{4.64}$$

Man betrachte dazu den Fall des plastischen ebenen Fließens. Der Spannungsdeviator kann durch Hauptachsentransformationen in jedem Punkt auf die Gestalt

$$s_{ij} = \begin{pmatrix} s_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s_I \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad s_I = \tau_F \tag{4.65}$$

gebracht werden. Wenn man diesen Spannungsdeviator in das Hauptteilpolynom einsetzt, verschwindet das Polynom für bestimmte $\xi \neq 0$.

Bemerkungen

1. Die Menge, auf der $a_p(\cdot,\cdot)$ nicht elliptisch ist, ist eine Menge vom Maße 0. Deshalb könnte eine eindeutig bestimmte Lösung für (4.58) wahrscheinlich mit entsprechenden Regularisierungen nachgewiesen werden.

2. Für das Problem (4.58) würde eine eindeutig bestimmte Lösung existieren, wenn

$$|a_p(\underline{\phi},\underline{\xi})| < |a_e(\underline{\phi},\underline{\xi})| \quad \forall \underline{\phi},\underline{\xi} \in X$$

   gelten würde.

3. Das Problem (4.58) kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$(1-\eta)a_e(\underline{\phi},\underline{\psi}) + \eta\left(a_e(\underline{\phi},\underline{\psi}) + a_p(\underline{\phi},\underline{\psi})\right) = < \underline{f},\underline{\phi} > \qquad (P_\eta) \quad .$$

   Nach dem Satz über die Fortsetzbarkeit bezüglich eines Parameters (siehe z. B. [44a, Satz 6.1]) hat (P_η) eine eindeutig bestimmte Lösung $\forall\eta$, wenn gezeigt werden kann, daß folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

   - $\underline{\phi}$ ist Lösung von $(P_\eta) \Rightarrow \|\underline{\phi}\|_X \leq c \cdot \|\underline{f}\|_{X'}$ mit c unabhängig von η und $\underline{f}$;
   - $a_e(\cdot,\cdot)$ und $a_p(\cdot,\cdot)$ sind linear und stetig;
   - (P_0) hat eine eindeutige Lösung $\forall \underline{f} \in X'$.

   (P_0) entspricht dabei dem elastischen Problem. Der dritte Punkt ist damit bereits nachgewiesen.

Existenz und Eindeutigkeit plastischer Deformationsprobleme werden z.B. in [38, S.263] oder [44e, S. 262] bewiesen. In beiden Fällen wurden aber Modelle für die plastische Deformation gewählt, die für eine numerischen Lösung wenig geeignet sind. Das Ziel der in diesem Zusammenhang durchgeführten Untersuchungen bestand aber darin, die thermischen Vorgänge beim Schweißen durch numerische Modelle zu beschreiben, die auf PC's bearbeitbar sind. Deshalb wurde versucht, die plastischen Deformationen durch ein Variationsfunktional zu beschreiben.

4.6 Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen

An dieser Stelle sollen die Bedingungen, die sich in den vorigen Abschnitten für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen ergeben haben, noch einmal zusammengefaßt werden. Außerdem soll untersucht werden, welche technische Bedeutung sich aus den mathematischen Bedingungen ergeben.

Zuerst wurden gewisse Bedingungen an die geometrische Gestalt des Gebietes Ω gestellt. Es wurde gefordert, daß Ω beschränkt ist, einen stückweise glatten Rand hat und die Kegelbedingung erfüllt. Die Beschränktheit ist dabei bei technischen Modellen a priori gegeben und die Forderung eines stückweise glatten Randes kann für technische Modelle ebenfalls als erfüllt angesehen werden. Die Kegelbedingung bedeutet, daß die untersuchten Gebiete in den Ecken nicht zu stark entarten, also zum Beispiel keine Schnabelspitzen besitzen. Mit diesen Vorraussetzungenn sind dann auch die Bedingungen an den Rand für die Anwendbarkeit des Gaußschen Integralsatzes, des inversen Spursatzes (4.28), der Ungleichung von Poincaré (4.34), Ungleichung (4.31) und der Kornschen Ungleichung (4.46) erfüllt.

Weiterhin ergaben sich Kompatibilitätsbedingungen für die Randwerte. Diese forderten, daß in Punkten mit wechselnden Randbedingungen (wie z. B. Ecken) diese sich nicht widersprechen. Es dürfen also z. B. in einer Ecke nicht zwei Ränder aufeinandertreffen, auf denen verschiedene Temperaturen als Dirichlet-Randbedingung gefordert werden.

Für die Existenz und Eindeutigkeit des Variationsproblems der Wärmeleitung ergaben sich noch weitere Bedingungen an die Koeffizienten. Zum einen mußten die Materialwerte λ und α_T nach oben und unten beschränkt bleiben:

$$\begin{aligned} 0 < \lambda_0 &\leq \lambda(x,y,t) \leq \lambda_m < \infty \\ 0 < \alpha_0 &\leq \alpha_T(x,y,t) \leq \alpha_m < \infty \qquad \forall (x,y) \in \Omega \; \forall t > 0 \quad . \end{aligned}$$

Das ist eine Forderung, die bei technischen Modellen ebenfalls erfüllt ist. Konsequenzen ergeben sich aber aus der Tatsache, daß die Existenz und Eindeutigkeit nur für variable Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x, y, t)$ gezeigt werden kann, jedoch nicht für nichtlineare Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$. Numerisch sinnvolle Ergebnisse sind aber nur dann zu erwarten, wenn Existenz und Eindeutigkeit des Variationsproblems gesichert sind. Um trotzdem mit temperaturabhängiger Wärmeleitfähigkeit zu rechnen, muß man bei der numerischen Berechnung daher folgendermaßen vorgehen: Wenn aus den Temperaturwerten zum Zeitpunkt t_{k-1} die Temperaturen zum Zeitpunkt t_k bestimmt werden sollen, werden vorher nach der Beziehung

$$\lambda(x, y, t_k) = \lambda\left(T(x, y, t_{k-1})\right) \tag{4.66}$$

Wärmeleitfähigkeitswerte bestimmt, die temperaturabhängig sind, aber für den dann folgenden Zeitschritt von t_{k-1} nach t_k feststehen und damit als variabel betrachtet werden können. Allerdings erhält man dadurch einen systematischen Fehler, da während der Erwärmungsphase die Wärmeleitfähigkeit von zu niedrigen Temperaturen und während der Abkühlungsphase von zu hohen Temperaturen abhängig gemacht wird. Trotzdem erhält man durch dieses Vorgehen bessere Ergebnisse, als mit konstanten Koeffizienten oder variablen (und nicht temperaturabhängigen) Koeffizienten. Der systematische Fehler ist um so kleiner, je kleiner die Zeitschritte $t_k - t_{k-1}$ in der numerischen Rechnung sind.

Für die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen des elastischen Problems ergaben sich noch zusätzliche Bedingungen an die Beschränktheit der Laméschen Konstanten λ und ν. Hier mußte

$$0 < c_0 \leq \lambda\,, \nu + \lambda \leq c_m < \infty$$

gelten. Für die Materialien aus Tabelle 3.2 ist diese Beschränktheit erfüllt, so daß sich keine technischen Einschränkungen ergeben.

Kapitel 5

Berechnung ebener Probleme mit der FEM

5.1 Berechnung ebener Temperaturfelder

Wenn die numerische Berechnung von Temperaturfeldern brauchbare Ergebnisse liefern soll, müssen viele Faktoren und Einflußgrößen berücksichtigt werden. In [15] werden folgende Kriterien für erfolgversprechende Verfahren aufgelistet:

1. Wärmeausbreitung im Metall infolge Wärmeleitung
2. Wärmeübergang vom Bauteil in die Umgebung durch
   - Konvektion
   - Strahlung
   - Ableitung in Auflager, Spannvorrichtungen, Schweißbadsicherungen usw.
3. Gefüge- und Phasenumwandlungen mit davon abhängiger Wärmezufuhr und -abgabe
4. Temperaturabhängige Werkstoffgrößen wie λ , ϱ , c sowie temperaturabhängiger Wärmeübergangskoeffizient α_T
5. Wärmequelle in Abhängigkeit vom technologischen Verfahren
   - ihre geometrische Gestalt
   - die Energie- und Temperaturverteilung
   - I_s , U_s , v_s , Zusatzwerkstoffe
6. Wärmeübergang von der Wärmequelle ins Grundmetall
7. Räumliches Temperaturfeld zumindest in Quellennähe

Für ein Modell, das alle diese Anforderungen berücksichtigt, können keine analytischen Lösungen mehr berechnet werden. Hierfür sind nur noch numerische Verfahren geeignet. Als Verfahren stehen hier u. a.

- Finite Differenzenverfahren,
- die Methode der Finiten Elemente (FEM),
- Randelementverfahren oder
- Kollokationsmethoden

zur Auswahl. An dieser Stelle soll die FEM als Lösungsmethode mit den in Kapitel 4 hergeleiteten Funktionalen benutzt werden. Bei diesem Verfahren wird das Minimum des Funktionals bzw. die schwache Lösung nicht im gesamten Raum V gesucht, sondern nur in einem endlichdimensionalen Teilraum V_h . Diesen Teilraum V_h erhält man, indem das betreffende Gebiet Ω in kleine Teilgebiete zerlegt wird und auf jedem Teilgebiet ein Polynom (oder eine andere C^∞-Funktion) als Ansatzfunktion gewählt wird.

Auswahl der Ansatzfunktionen

Für die richtige Auswahl der Ansatzfunktionen ist der folgende Satz von entscheidender Bedeutung (siehe z. B. [5, Satz 5.2]).

Satz 5.1 *Es sei $k \geq 1$ und Ω beschränkt. Eine stückweise beliebig oft differenzierbare Funktion $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ gehört genau dann zu $W^{k,2}$, wenn $v \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ gilt.*

Die Lösung des Problems der Wärmeleitung liegt in $W^{1,2}$. Als Ansatzfunktionen (die in $W^{1,2}$ liegen) kann man also Funktionen benutzen, die aus C^0 sind. Wenn wir als Teilgebiete Dreiecke auswählen, erhält man eine Triangulierung wie sie z. B. in Abbildung 5.1 dargestellt ist.

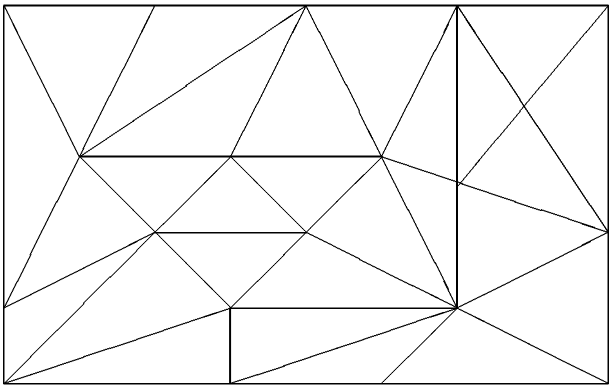


Abbildung 5.1: Vernetzung

Beim linearen Dreieckselement wird jetzt in jedem Dreieck ein linearer Näherungsansatz für die Temperatur $T(x, y, t_k) \approx \tilde{T}_k(x, y)$

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{e=1}^{E} \tilde{T}^{(e)}(x, y) \tag{5.1}$$

gemacht. Dabei ist E die Anzahl der finiten Elemente, $\tilde{T}^{(e)}$ ist ein Ansatz für die Temperatur im Element e :

$$\tilde{T}^{(e)}(x, y) = \alpha^{(e)} + \beta^{(e)} \cdot x + \gamma^{(e)} \cdot y \qquad (x, y) \in \text{Element } e \quad . \tag{5.2}$$

Jetzt seien T_i, T_j und T_k die Temperaturen in den drei Knotenpunkten i, j, k . Dann erhalten wir in jedem Element (e) ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der drei unbekannten Größen α, β und γ :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta x_i + \gamma y_i &= T_i \\ \alpha + \beta x_j + \gamma y_j &= T_j \\ \alpha + \beta x_k + \gamma y_k &= T_k \quad . \end{aligned}$$

Als Lösung des linearen Gleichungssystems ergibt sich:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2A} \left[(x_j y_k - x_k y_j) \cdot T_i + (x_k y_i - x_i y_k) \cdot T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k \right] \\ \beta &= \frac{1}{2A} \left[(y_j - y_k) \cdot T_i + (y_k - y_i) \cdot T_j + (y_i - y_j) T_k \right] \\ \gamma &= \frac{1}{2A} \left[(x_k - x_j) \cdot T_i + (x_i - x_k) \cdot T_j + (x_j - x_i) T_k \right], \end{aligned}$$

wobei A der Flächeninhalt des Dreiecks i, j, k ist:

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \quad . \tag{5.3}$$

Wir definieren jetzt die Formfunktionen N_l wie folgt:

$$
\begin{aligned}
N_i(x,y) &= \frac{1}{2A}\left[x_j y_k - x_k y_j + (y_j - y_k)\cdot x + (x_k - x_j)\cdot y\right] \\
N_j(x,y) &= \frac{1}{2A}\left[x_k y_i - x_i y_k + (y_k - y_i)\cdot x + (x_i - x_k)\cdot y\right] \\
N_k(x,y) &= \frac{1}{2A}\left[x_i y_j - x_j y_i + (y_i - y_j)\cdot x + (x_j - x_i)\cdot y\right] \quad .
\end{aligned}
\tag{5.4}
$$

Durch Einsetzen der Lösungen für α, β, γ in $\tilde{T}$ und Umstellen nach T_i, T_j, T_k erhält man:

$$
\tilde{T}(x,y) = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = [N]\{T\}
\tag{5.5}
$$

mit $[N] = (N_i, N_j, N_k)$ und $\{T\} = (T_i, T_j, T_k)^T$. Für andere Triangulierungen des Gebietes und andere Ansatzfunktionen erhält man natürlich andere Formfunktionen. Außer dem linearen Ansatz über Dreiecke könnte man z. B.

1. den unvollständigen quadratischen Ansatz über Vierecke[1]:

$$
\tilde{T}^{(e)}(x,y) = \alpha^{(e)} + \beta^{(e)}\cdot x + \gamma^{(e)}\cdot y + \eta^{(e)}\cdot xy \qquad (x,y) \in \text{Element } e
\tag{5.6}
$$

   oder

2. den vollständigen kubischen Ansatz über Dreiecke:

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}^{(e)}(x,y) &= \alpha_1^{(e)} + \alpha_2^{(e)}\cdot x + \alpha_3^{(e)}\cdot y + \alpha_4^{(e)}\cdot x^2 + \alpha_5^{(e)}\cdot xy + \alpha_6^{(e)}\cdot y^2 \\
&\quad + \alpha_7^{(e)}\cdot x^3 + \alpha_8^{(e)}\cdot x^2 y + \alpha_9^{(e)}\cdot xy^2 + \alpha_{10}^{(e)}\cdot y^3
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

   (hier werden nicht nur die Eckpunkte sondern je 2 weitere Knotenpunkte auf jeder Dreiecksseite verwendet)

benutzen. Alle diese Elemente sind aus $C^0(\overline{\Omega})$. Schwieriger wird es, Elemente zu konstruieren, die aus $C^1(\overline{\Omega})$ sind (siehe z. B. [5] oder [8]). Für ein Dreieckselement kann man von einem Polynom 5. Grades (21 Freiheitsgrade) ausgehen. In jedem Eckpunkt werden der Funktionswert und die Werte bis zu den 2. Ableitungen vorgegeben. Die restlichen 3 Freiheitsgrade werden dann durch die Werte der Normalenableitung an den Seitenmitten festgelegt. Die daraus entstehenden Ansatzfunktionen sind dann aus $C^1(\overline{\Omega})$.

Berechnung des Funktionals für die Wärmeleitung

Die obige Ansatzfunktion gilt für jedes einzelne Element. Wenn wir das Funktional (4.41) auf das Element (e) einschränken, ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}^{(e)}(T) &= \int\!\!\cdots\!\!\int_{\Omega^{(e)}} \lambda(x,y)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \lambda(x,y)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \\
&\quad -2\cdot T\cdot Q + 2\cdot T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(x,y)\cdot\varrho(x,y)\cdot T\Big)\,dxdy \\
&\quad -\int_{S_2^{(e)}} 2\cdot T\cdot\Phi\,dS + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T(x,y)\cdot T\cdot(T - 2\cdot T_{um})\,dS \quad .
\end{aligned}
\tag{5.8}
$$

Wir vereinbaren jetzt die Bezeichnungen:

$$
\{g\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [D] = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad .
\tag{5.9}
$$

Damit ergibt sich:

$$
\{g\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & \frac{\partial N_j}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} T_i \\ T_j \\ T_k \end{array} \right\} = [B]\{T\} \quad .
\tag{5.10}
$$

[1]Dieser Ansatz wird auch bilineares Viereckselement genannt.

Daraus folgt:

$$[B] = \frac{1}{2A} \begin{pmatrix} y_j - y_k & y_k - y_i & y_i - y_j \\ x_k - x_j & x_i - x_k & x_j - x_i \end{pmatrix} \quad . \tag{5.11}$$

Wir erhalten damit für das Funktional (5.8)

$$\begin{aligned} \tilde{F}(T) \;=\; & \int_{\Omega^{(e)}} \!\!\cdots\!\! \int \{T\}^T [B^{(e)}]^T [D^{(e)}][B^{(e)}]\{T\} - 2Q[N^{(e)}]\{T\} + 2c\varrho[N^{(e)}]^T\{T\}^T[N^{(e)}]\frac{\partial\{T\}}{\partial t}\, d\Omega \\ & - \int_{S_2^{(e)}} 2\Phi[N^{(e)}]\{T\}\, d(\partial\Omega) + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T\{T\}^T[N^{(e)}]^T[N^{(e)}]\{T\} - 2\alpha_T T_{um}[N^{(e)}]\{T\}\, d(\partial\Omega) \quad . \end{aligned} \tag{5.12}$$

Durch Formel (5.12) haben wir jetzt das Funktional als Funktion der Temperaturen in den Elementknoten ausgedrückt:

$$\tilde{F}^{(e)} = \tilde{F}^{(e)}(T_i, T_j, T_k) \quad .$$

Durch Zusammenfassen der eingeschränkten Funktionale für alle Elemente ergibt sich dann das Funktional für das gesamte Gebiet:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(T) &= \sum_{(e)} \tilde{F}^{(e)} \\ &= \tilde{F}(T_1, T_2, \ldots, T_N) \quad . \end{aligned} \tag{5.13}$$

Aufstellen des linearen Gleichungssystems

Damit das Funktional (5.12) sein Minimum annimmt, müssen in den Elementknoten alle partiellen Ableitungen nach den Temperaturen verschwinden:

$$\frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial T_i} = \sum_{e=1}^{E} \frac{\partial\chi^{(e)}}{\partial T_i} = 0 \qquad i = 1, \ldots, N \quad . \tag{5.14}$$

Nach dem Zusammenfassen ergibt sich ein Gleichungssystem für das Element e. Dieses hat in Matrizenschreibweise die Gestalt:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\partial\tilde{\chi}}{\partial T_i} \right\} \;=\; & \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int [B]^T[D][B]\{T\}\, d\Omega - \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int Q[N]^T\, d\Omega \\ & + \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int c\rho[N]^T[N]\frac{\partial\{T\}}{\partial t} - \int\!\!\int_{\partial\Omega} \Phi[N]^T\, dS \\ & + \int\!\!\int_{\partial\Omega} \alpha_T[N]^T[N]\{T\}\, dS - \int\!\!\int_{\partial\Omega} \alpha_T T_{um}[N]^T\, dS \quad . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} [C^{(e)}] &= \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int c\rho[N]^T[N]\, d\Omega \\ &= \int\!\!\int_{\Omega}\!\!\int c\varrho \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k \end{bmatrix} d\Omega \\ &= \frac{c\varrho\,\mathrm{mes}(\Omega^{(e)})}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad . \end{aligned}$$

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} b_i &= y_j - y_k & b_j &= y_k - y_i & b_k &= y_i - y_j \\ c_i &= x_k - x_j & c_j &= x_i - x_k & c_k &= x_j - x_i \end{aligned}$$

folgt weiter:

$$
\begin{aligned}
[K^{(e)}] &= \int\cdots\int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}][D^{(e)}][B^{(e)}]\, d\Omega + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T [N^{(e)}][N^{(e)}]\, d(\partial\Omega) \\
&= \int\cdots\int_{\Omega^{(e)}} \frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & c_i \\ b_j & c_j \\ b_k & c_k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\frac{1}{2A}\begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} d\Omega \\
&\quad + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T \begin{bmatrix} N_iN_i & N_iN_j & N_iN_k \\ N_jN_i & N_jN_j & N_jN_k \\ N_kN_i & N_kN_j & N_kN_k \end{bmatrix} d(\partial\Omega) \\
&= \int\cdots\int_{\Omega^{(e)}} [B^{(e)}][D^{(e)}][B^{(e)}]\, d\Omega + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T [N^{(e)}][N^{(e)}]\, d(\partial\Omega) \\
&= \frac{\lambda s}{4A}\begin{bmatrix} b_ib_i + c_ic_i & b_ib_j + c_ic_j & b_ib_k + c_ic_k \\ b_jb_i + c_jc_i & b_jb_j + c_jc_j & b_jb_k + c_jc_k \\ b_kb_i + c_kc_i & b_kb_j + c_kc_j & b_kb_k + c_kc_k \end{bmatrix} + \frac{2\alpha_T A}{12}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\
&\quad + \frac{\alpha_{Tij} L_{ij} s}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{Tjk} L_{jk} s}{6}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \frac{\alpha_{Tik} L_{ik} s}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei hat das Dreieckselement $\Omega^{(e)}$ die Fläche A und die Dicke s. L_{ij} ist die Länge der Seite zwischen Knoten i und j . Für die Berechnung der Integrale gelten folgende Formeln:

$$
\begin{aligned}
\int_{L_{ij}} N_l N_m\, d(\partial\Omega) &= \begin{cases} \frac{L_{ij}}{3} & \text{für } l = m = i \text{ oder } l = m = j \\ \frac{L_{ij}}{6} & \text{für } (l = i \text{ und } m = j) \text{ oder } (l = j \text{ und } m = i) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\int_{L_{ij}} N_l\, d(\partial\Omega) &= \begin{cases} \frac{L_{ij}}{2} & \text{für } l = i \text{ oder } l = j \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\int_{\Omega} N_l\, d\Omega &= \frac{A}{3} \quad \text{für beliebiges } l \quad .
\end{aligned}
$$

Für die rechte Seite ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\{f\} &= \int_{\Omega^{(e)}} Q[N]^T\, d\Omega + \int_{S_2^{(e)}} \Phi[N]^T\, d(\partial\Omega) + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T T_{um} [N]^T d(\partial\Omega) \\
&= \int_{\Omega^{(e)}} Q \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} d\Omega + \int_{S_2^{(e)}} \Phi \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} d(\partial\Omega) + \int_{S_3^{(e)}} \alpha_T T_{um} \begin{bmatrix} N_i \\ N_j \\ N_k \end{bmatrix} d(\partial\Omega) \\
&= \frac{1}{3} Q \mathrm{mes}(\Omega) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{3}\Phi A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\Phi_{ij} L_{ij} s \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}\Phi_{jk} L_{jk} s \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\Phi_{ik} L_{ik} s \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{2}{3}\alpha_T T_{um} A \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2}\alpha_{T\,ij} T_{um} L_{ij} s \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\alpha_{T\,jk} T_{um} L_{jk} s \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\alpha_{T\,ik} T_{um} L_{ik} s \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad .
\end{aligned}
$$

Durch Aufsummieren aller Gleichungen für alle Elemente erhält man

$$
[C]\frac{\partial\{T\}}{\partial t} + [K]\{T\} = \{F\} \tag{5.16}
$$

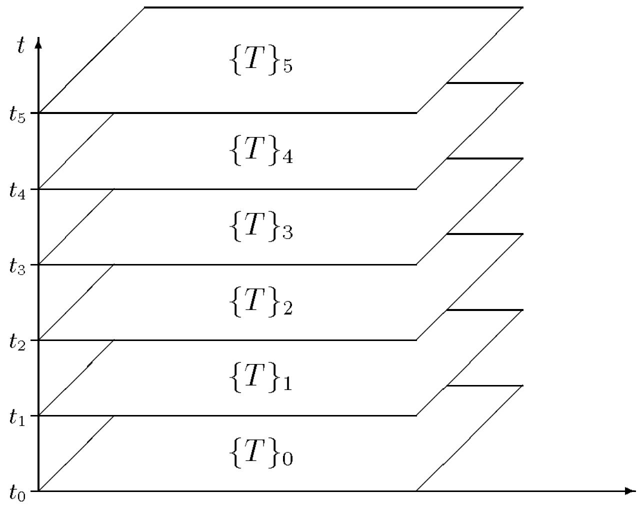


Abbildung 5.2: Diskretisierung in der Zeit

mit

$$[C] = \sum_{e=1}^{E}[C^{(e)}] \qquad [K] = \sum_{e=1}^{E}[K^{(e)}] \qquad \{F\} = \sum_{e=1}^{E}\{f^{(e)}\} \quad .$$

Diskretisierung in der Zeit

Für einen beliebigen, fest gewählten Zeitpunkt t_k haben wir das Gleichungssystem (5.16) erhalten. Gleichung (5.16) stellt ein System linearer Differentialgleichungen 1. Ordnung dar. Das Zeitintervall $[0, t_{end}]$ wird jetzt durch viele Zeitpunkte t_k in „kleine“Zeitintervalle $[t_{k-1}, t_k]$ zerlegt. Damit erhält man eine Folge von Näherungslösungen $\{T\}_0, \{T\}_1, \{T\}_2, \ldots, \{T\}_{end}$ zu den verschiedenen Zeitpunkten $t_0, t_1, \ldots, t_{end}$ (siehe Abbildung 5.2). Die Anfangsbedingung $T(\underline{x}, 0) = T_0(\underline{x})$ geht dadurch in die nullte diskrete Lösung $\{T\}_0$ über[2]. Die Ableitung in der Zeit wird jetzt durch Finite-Differenzen-Formeln approximiert. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. Die Crank-Nicolson-Methode
   Für diese Methode wird die zentrale Differenzenformel benutzt. Dazu betrachtet man den Zeitpunkt $t_{k-\frac{1}{2}}$ des Zeitintervalls $[t_{k-1}, t_k]$. Die Differenzenformel lautet

$$\left(\frac{\partial\{T\}}{\partial t}\right)_{t=t_{k-\frac{1}{2}}} \approx \frac{\{T\}_k - \{T\}_{k-1}}{\Delta t} \quad .$$

   Mit dieser Differenzenformel und den beiden Näherungsformeln

$$\{T\}_{k-\frac{1}{2}} \approx \frac{\{T\}_k + \{T\}_{k-1}}{2} \qquad \{F\}_{k-\frac{1}{2}} \approx \frac{\{F\}_k + \{F\}_{k-1}}{2}$$

   ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$[\bar{K}]\{T\}_k = \{\bar{F}\} \tag{5.17}$$

   mit

$$\begin{aligned} [\bar{K}] &= [K] + \frac{2}{\Delta t}[C] \qquad (5.18) \\ \{\bar{F}\} &= \left(\frac{2}{\Delta t}[C] - [K]\right)\{T\}_{k-1} + \{F\}_k + \{F\}_{k-1} \quad . \end{aligned}$$

[2] Genau genommen ist die nullte diskrete Lösung die Approximation der Anfangsbedingung im Raum der räumlichen Ansatzfunktionen.

Damit erhält man das lineare Gleichungssystem (5.17), mit dem aus den Temperaturen zum Zeitpunkt t_{k-1} (die in die rechte Seite des Gleichungssystems eingehen) die Temperaturen zum Zeitpunkt t_k berechnet werden können.

2. Die Gearsche 3-Levelmethode
Mit dieser Methode erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\left[[K] + \frac{3}{2\Delta t}[C]\right]\{T\}_k = 3\{F\} - [K]\{T\}_{k-1} - \left[[K] + \frac{3}{2\Delta t}[C]\right]\{T\}_{k-2} \quad . \tag{5.19}$$

Bei Anwendung dieser Methode ergeben sich stabile Temperaturverläufe, vergleiche z. B. [2].

3. Die Houbolt-Methode
Bei dieser Methode wird für die zeitliche Ableitung zum Zeitpunkt t_k die folgende Differenzenformel benutzt:

$$\left(\frac{\partial\{T\}}{\partial t}\right)_k \approx \frac{1}{6\Delta t}\left(11\{T\}_k - 18\{T\}_{k-1} + 9\{T\}_{k-2} - 2\{T\}_{k-3}\right) \quad .$$

Damit ergibt sich für $\{T\}_k$ das folgende Gleichungssystem:

$$\left(\frac{11}{6\Delta t}[C] + [K]\right)\{T\}_k = \{F\}_k + \frac{3}{\Delta t}[C]\{T\}_{k-1} - \frac{3}{2\Delta t}[C]\{T\}_{k-2} + \frac{1}{3\Delta t}[C]\{T\}_{k-3} \quad . \tag{5.20}$$

Der wesentliche Unterschied zu den expliziten Methoden besteht darin, daß die Steifigkeitsmatrix $[K]$ zum Zeitpunkt t_k benutzt wird und nicht die Steifigkeitsmatrix von einem früheren Zeitpunkt. Die Houbolt-Methode ist eine implizite Methode. Das ist besonders dann sehr günstig, wenn die Steifigkeitsmatrix mit von der Lösung abhängt (z.B. Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit von der Temperatur). Für diese Methode gibt es keine kritische Schrittweite Δt_{cr}, deshalb kann man Δt größer als zum Beispiel in der zentralen Differenzenformel gewählt werden. Am Anfang ist allerdings eine Startrechnung erforderlich, da die Temperaturwerte $\{T\}$ der drei vorhergehenden Zeitpunkte benötigt werden (siehe z. B. [2]).

Weitere Methoden, wie z. B. die Wilson-Methode, werden u. a. in [2] und [45] vorgeschlagen.

Vernetzung des Grundgebietes

Eine wichtige Rolle für die numerische Lösung spielt die Wahl des Netzes. Temperaturfelder beim Schweißen zeichnen sich dadurch aus, daß die Wärme stark lokal in das Bauteil eingebracht wird. Das ist bei der Vernetzung des Gebietes zu berücksichtigen. Im Bereich der Wärmequelle entstehen hohe Temperaturgradienten, diese werden um so geringer, je weiter man sich von der Wärmequelle entfernt. In die Formeln für Fehlerabschätzungen geht der Betrag des Temperaturgradienten mit ein. Im Bereich der Wärmequelle werden deshalb sehr feine Netze benötigt, um gute Genauigkeiten zu erreichen. Weiter entfernt von der Wärmequelle sind dagegen gröbere Gitter ausreichend. Um Speicherplatz und Rechenzeit zu sparen, ist es daher sinnvoll, nicht mit den für andere Probleme üblichen Typ-I und Typ-II-Triangulationen zu rechnen, sondern ein Netz mit Netzverfeinerung im Bereich der Wärmequellen zu benutzen.

Eine Zerlegung in Dreieckselemente ist flexibler. Wie die numerischen Resultate zeigen, reichen diese Elemente für Temperaturfeldberechnungen aus. Bei der Berechnung von Spannungen und Deformationen ist es aber häufig so, daß auf Grund der Geometrie des Bauteils einzelne Richtungen ausgezeichnet sind. Die linearen Dreieckselemente liefern hier schlechte Resultate. Deshalb werden in der Strukturmechanik Viereckselemente (meistens auch höherer Ordnung) bevorzugt.

5.2 Numerische Resultate

In diesem Abschnitt sollen einige Ergebnisse der Berechnung von ebenen Temperaturfeldern vorgestellt und mit experimentellen Resultaten verglichen werden. Um praktische Resultate mit numerischen Ergebnissen zu vergleichen, bieten sich verschiedene Kriterien an:

1. Vergleich der Schmelzlinie
   An einem geschweißten Werkstück kann mit Mikroschliff die Schmelzlinie bestimmt werden. Um die Schmelzlinie numerisch zu bestimmen, wird für alle Knotenpunkte die Maximaltemperatur berechnet. Für die Maximaltemperaturen wird nun die 1520 °C-Isotherme ermittelt, die dann die Schmelzlinie darstellt (1520 °C ist die Schmelztemperatur von Eisen, bei anderen Schmelztemperaturen muß natürlich diese Isothermentemperatur benutzt werden).

2. Vergleich des Temperatur-Zeit-Zyklus
   Während des Experiments wird ein Thermoelement in das Schweißbad eingetaucht. Nach Erstarren des Schweißbades wird mit diesem Element der Temperatur-Zeit-Verlauf für die Abkühlphase aufgenommen. Für den numerischen Temperatur-Zeit-Verlauf muß zuerst ein geeigneter Knotenpunkt ausgewählt werden. Dies muß ein Knotenpunkt sein, der im Bereich des Thermoelements liegt. Für diesen Knotenpunkt wird dann ebenfalls der Temperatur-Zeit-Zyklus berechnet.

3. Vergleich der Abkühlzeit
   Eine wichtige Rolle für die Bestimmung der mechanischen Kennwerte spielt die Abkühlzeit; das ist die Zeit, die der Bereich der Schweißnaht (und der Wärmeeinflußzone) für die Abkühlung von 850 °C auf 500 °C braucht. In diesem Temperaturintervall findet die Umwandlung zwischen den verschiedenen Modifikationen des Eisens statt. Die Ausprägung verschiedener mechanischer Eigenschaften hängt wesentlich davon ab, wie lange sich der Körper in diesem Temperaturintervall befindet.

1. Experiment: verschiedene Wärmeführungen

Im folgenden werden die experimentellen und numerischen Resultate für ein Experiment mit 28mm dickem Blech dargestellt. Auf dieses Blech wurde mit dem MAG(CO_2)-Schweißverfahren eine Auftragsraupe aufgeschweißt. Auf Grund der Schweißparameter bildet sich in dem Blech ein starkes Eigenspannungsfeld heraus. Um dieses Eigenspannungsfeld abzubauen, wird versucht, die Abkühlzeit durch verschiedene Maßnahmen zu verlängern. In dem Experiment erfolgt deshalb einmal die Schweißung ohne zusätzliche Maßnahmen; danach wird die Schweißung jeweils mit Vorwärmung, mit erhöhter Streckenenergie und mit Nachwärmung durchgeführt. Für die Modellierung der Schweißungen kann auf Grund der Schweißparameter angenommen werden, daß die Wärme praktisch senkrecht zur Schweißnaht abfließt. Entsprechend Abbildung 1.6 auf Seite 22 wurde das Temperaturfeld in diesem Blech als eben modelliert. Die aus dem Blech herausgeschnittene dünne Platte wurde nun, wie in Abbildung 5.3 dargestellt, vernetzt. Wie aus Abbildung 5.3 ersichtlich ist, wurde die Auftragsraupe mit vernetzt. Aus Symmetriegründen brauchte hier nur die halbe Platte betrachtet zu werden, so daß sich das Zentrum der Schweißnaht bei $y = 0$ und $z = 2.8$ befindet. Auf der Seite bei $y = 0$ wird als Randbedingung die Symmetriebedingung benutzt, auf dem restlichen Rand herrscht Konvektion. Für diese Platte mit der entsprechenden Vernetzung wurden jetzt konkret folgende Experimente durchgeführt.

1. Basiszyklus
   Die Platte wurde mit folgenden Parametern geschweißt: $I = 220A$, $U = 33V$ und $v = 24\frac{\text{cm}}{\text{min}}$. Auf Grund des Verfahrens ist der Wirkungsgrad 0.85 und der Radius des Wärmeflecks 0.7 cm. Die Anfangstemperatur beträgt 20 °C. In Abbildung 5.4 wird der berechnete Verlauf der Isothermen der Maximaltemperaturen für 1520 °C (das ist die Schmelzlinie), 850 °C und 500 °C gezeigt; Abbildung 5.5 stellt den Temperatur-Zeit-Zyklus des Thermoelements und des Knotens mit den Koordinaten $y = 0.3$cm und $z = 2.2$cm aus der Vernetzung dar.

2. Schweißen mit Vorwärmtemperatur
   Der vorige Versuch wurde wiederholt, diesmal wurde aber mit Vorwärmung des Werkstücks gearbeitet. Die Anfangstemperatur beträgt damit 340 °C. Die entsprechenden Temperatur-Zeit-Zyklen zeigt Abbildung 5.6 .

3. Schweißen mit erhöhter Streckenenergie
   Diesmal wurde im Vergleich zum 1. Versuch die Stromstärke auf 270A erhöht und die Schweißgeschwindigkeit auf $12\frac{\text{cm}}{\text{s}}$ gesenkt. Die Ergebnisse zeigt Abbildung 5.7 .

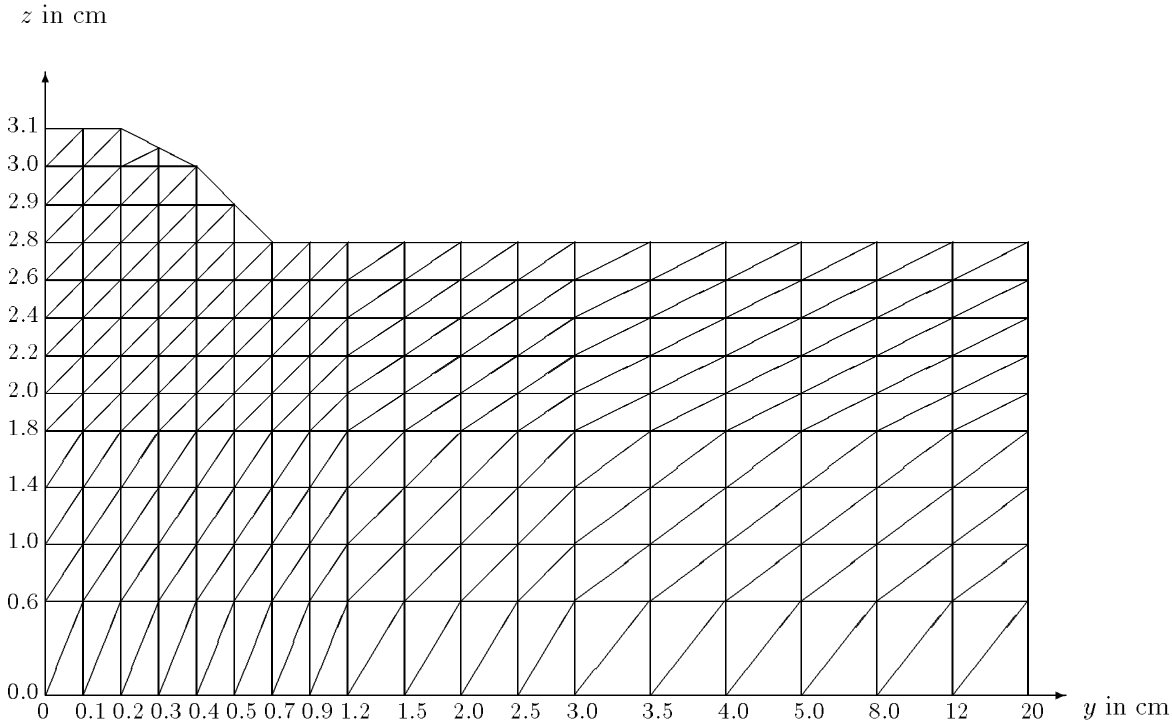


Abbildung 5.3: Vernetzung

4. Schweißen mit Nachwärmung
   Diesmal hatte die Schweißwärmequelle wieder dieselben Parameter wie im Basiszyklus, jetzt folgen der Schweißwärmequelle aber fünf Nachwärmequellen. Die Ergebnisse zeigt Abbildung 5.8 .

Die Entwicklung der Temperaturverteilung für den Basiszyklus ist in den Abbildungen 5.9 bis 5.11 dargestellt.

In allen 4 Fällen ergibt sich eine gute Übereinstimmung zwischen den gemessenen und berechneten Temperaturen, obwohl nur ein relativ grobes Netz gewählt wurde.

2. Experiment: Mehrlagenschweißen

In diesem Experiment wird eine 15mm dicke Platte mit dem MAG(CO_2)-Verfahren geschweißt. Der Wärmewirkungsgrad wurde mit 0.7 und der Radius des Wärmeflecks mit 1.4 gewählt. Aus der Nahtgeometrie (V-Naht mit Öffnungswinkel 50°) und den Schweißparametern ergibt sich, daß für die Naht 3 Lagen notwendig sind. Die Nahtlänge beträgt einen Meter. Alle drei Lagen

Lage	I in A	U in V	v in $\frac{\text{cm}}{\text{min}}$	t_0 in s	y_0 in cm	z_0 in cm
Wurzellage	160	24	16	0	0	0.5
Füllage	220	24	16	375	0	1.1
Decklage	260	26	20	750	0	1.65

Tabelle 5.1: Schweißparameter für das 2. Experiment

werden hintereinander geschweißt. Damit erhält man eine Zeitdifferenz von 375s zwischen den einzelnen Lagen. Für die einzelnen Lagen sind die Schweißparameter in Tabelle 5.1 zusammengefaßt. Die Berechnung erfolgte in diesem Beispiel ebenfalls nach dem Modell, daß die Wärme senkrecht zur Schweißnaht abfließt. Die sich damit für die einzelnen Lagen ergebenden Temperatur-Zeit-Zyklen zeigt Abbildung 5.12.

3. Experiment: Schwarz-Weiß-Verbindungen

In diesem Experiment wird eine Platte aus austenitischem Cr-Ni-Stahl mit einer Platte aus Kesselstahl HII verbunden. Die Wärmeleitfähigkeitskoeffizienten wurden dabei nach den Gleichungen (1.32) und (4.66) temperaturabhängig gewählt. Aufgrund der stark unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten dieser beiden Stähle ergibt sich ein unsymmetrisches Temperaturfeld. Für dieses Experiment wurde das Werkstück als dünne Platte ohne Temperaturgradient in Dickenrichtung modelliert. In Abbildung 5.13 ist das Temperaturfeld 90 Sekunden nach Beginn des Schweißens dargestellt. Der Einfluß der unterschiedlichen Wärmeleitfähigkeiten ist dabei deutlich zu erkennen. Geschweißt wurde dabei mit einem Lichtbogen und 2 Nachwärmequellen, die 3 cm rechts bzw. links neben der Naht nachgelaufen sind.

4. Experiment: Impulsstrom

Beim Impulsstrom ist wesentlich, mit welcher Frequenz die einzelnen Impulse gegeben werden. Je kleiner die Frequenz ist, desto inhomogener ist das entstehende Temperaturfeld. Das Modell, bei dem die Wärme senkrecht zur Schweißnaht abgeleitet wird, liefert im Bereich von 10 - 50 Hz noch gute Ergebnisse, während im Bereich von 1 - 10 Hz schon größere Abweichungen auftreten. Die Abbildung 5.14 zeigt die Temperatur-Zeit-Zyklen für ein Experiment, bei dem einmal mit Impulsen der Frequenz 12.5 Hertz und einmal mit gleichmäßigem Strom geschweißt wurde. Der Zyklus mit gleichmäßigem Strom wurde zur besseren Vergleichbarkeit dabei um 100°C erhöht in die Abbildung eingezeichnet. Beim Impulsstrom hatten der Grundstrom eine Stromstärke von 50A und die Impulse 250A. Gerechnet wurde mit dem Modell, daß die Wärme senkrecht zur Schweißnaht abfließt.

5. Experiment: Laserschweißen

Das Problem, daß beim Schweißen die Wärme stark konzentriert in das Werkstück eingebracht wird, ist für das Laserschweißen ganz besonders relevant. Während beim Lichtbogenschweißen der Radius des Wärmeflecks ungefähr 7 mm beträgt, ist dieser Radius beim Laserschweißen nur noch ungefähr 1 mm. Daraus resultieren besondere Anforderungen an die Vernetzung und die Zeitschrittweite. Für die hier durchgeführte Berechnung wurde eine 3 cm lange, 5 cm breite und 6 mm dicke Platte mit der Naht in der Mitte betrachtet. Diese Platte wurde als dünne Platte ohne Temperaturgradient in Dickenrichtung modelliert. Aus Symmetriegründen wurde wieder nur eine Plattenhälfte vernetzt. Um ausreichende Genauigkeit zu garantieren, mußten dabei im Bereich der Naht Elemente mit 0.25 mm Kantenlänge benutzt werden. Daraus ergibt sich dann eine Vernetzung mit 2430 Elementen, 1311 Knotenpunkten und einer Bandbreite von 44. Abbildung 5.15 zeigt die berechneten Temperatur-Zeit-Zyklen für die Punkte aus Tabelle 5.2. In Abbildung 5.16 wurde der Temperatur-Zeit-Zyklus für denselben Punkt einmal nach

Punkt	x-Koordinate in cm	y-Koordinate in mm	berechnete Abkühlzeit in s
1	2.40	0.00	0.58
2	2.40	0.75	0.58
3	2.40	1.50	0.63
4	2.40	3.00	-
5	2.40	6.00	-
6	2.40	10.00	-

Tabelle 5.2: Punkte für die Temperatur-Zeit-Zyklen

der Formel von Rykalin berechnet, dann numerisch ermittelt und mit einem Thermoelement gemessen.

Die Abbildungen 5.17 bis 5.19 zeigen das Temperaturfeld, nachdem 80 % des Plattenstreifens verschweißt sind, in dem Moment, in dem der Laser das Ende der Naht erreicht hat und 0.7 Sekunden nach dem Erreichen des Endes der Naht.

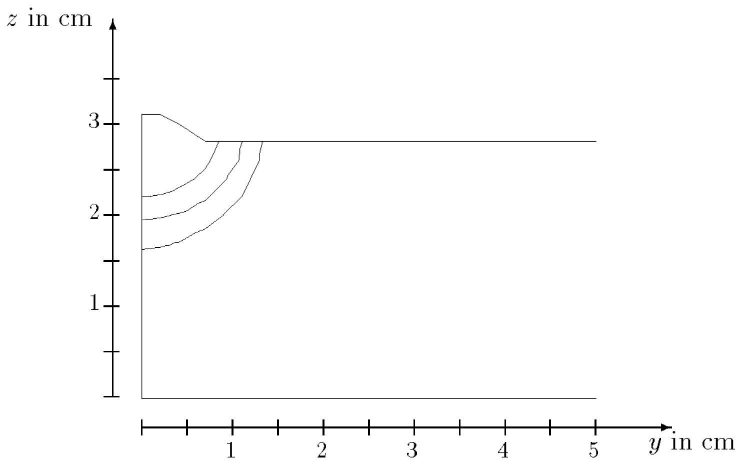


Abbildung 5.4: summarische Wärmeeinflußzonen für 1520 °C, 850 °C und 500 °C

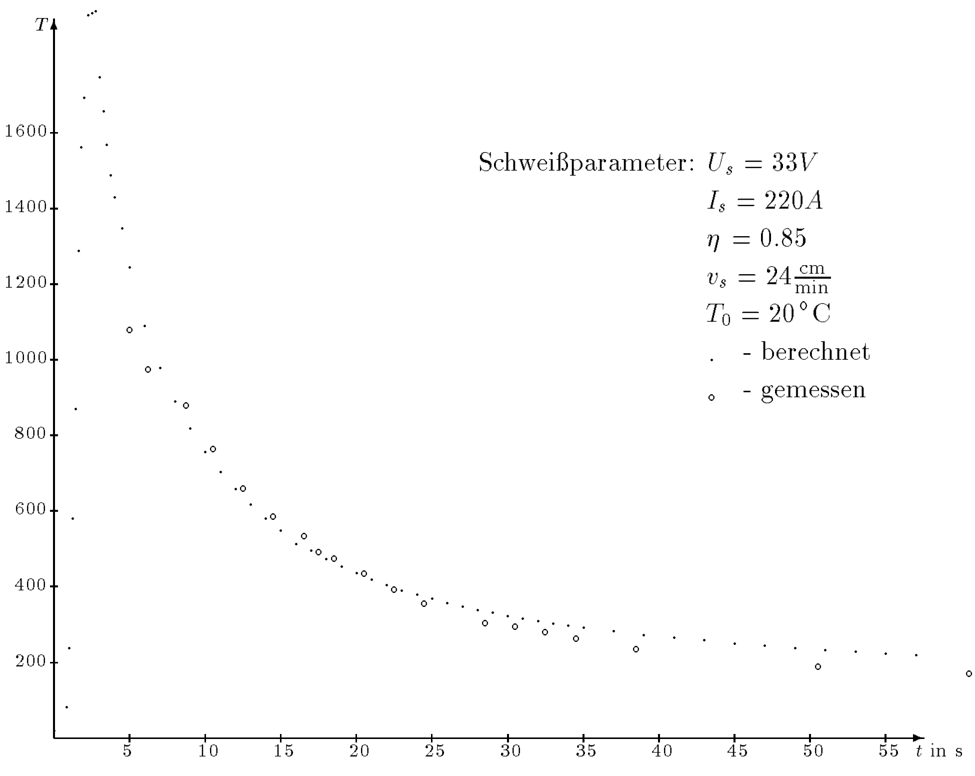


Abbildung 5.5: Temperatur-Zeit-Basiszyklus

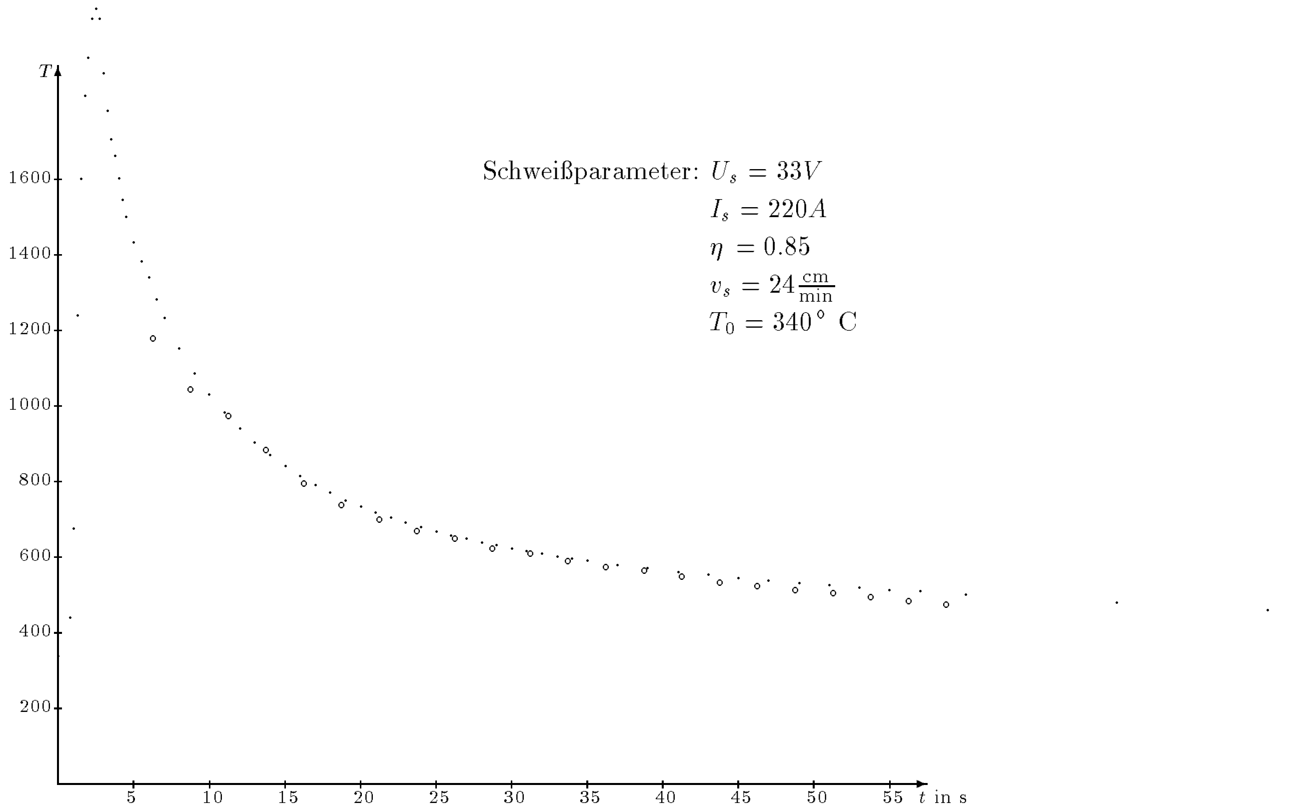


Abbildung 5.6: Temperatur-Zeit-Zyklus bei Vorwärmung

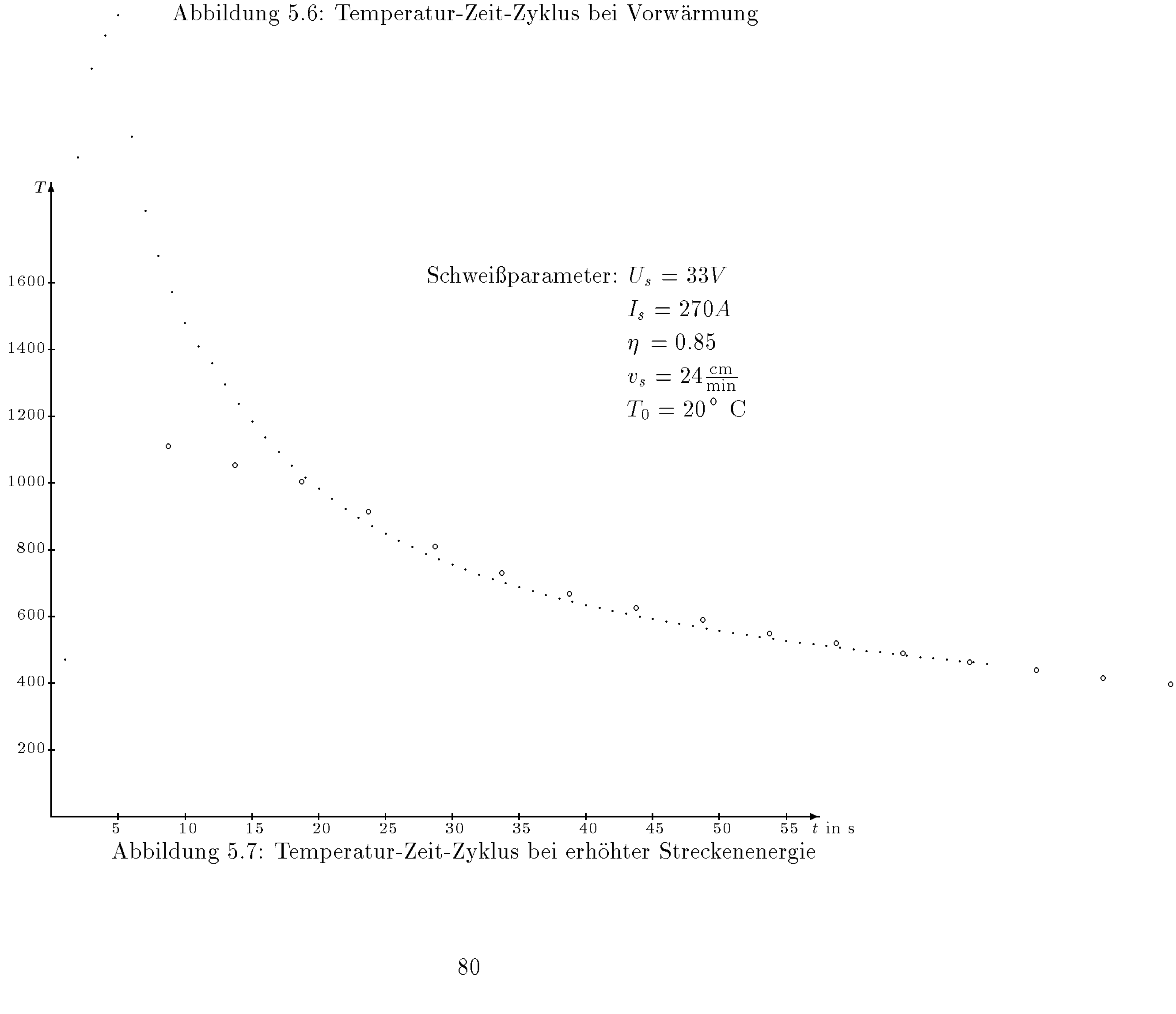


Abbildung 5.7: Temperatur-Zeit-Zyklus bei erhöhter Streckenenergie

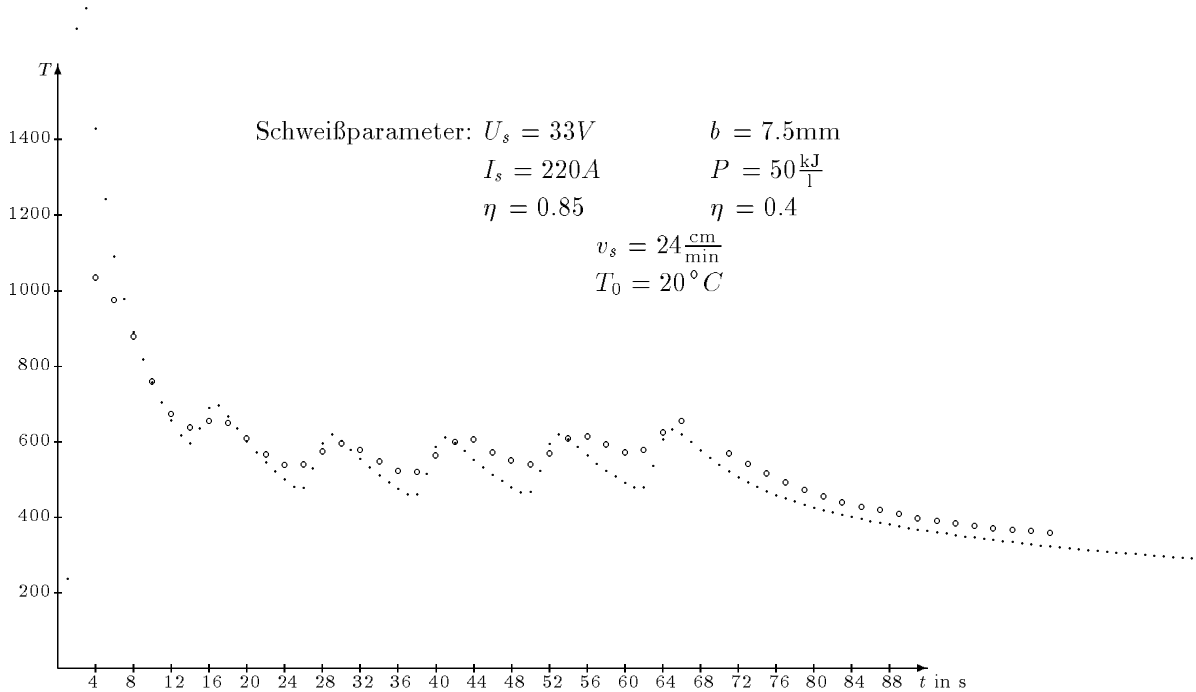


Abbildung 5.8: Temperatur-Zeit-Zyklus für Nachwärmung

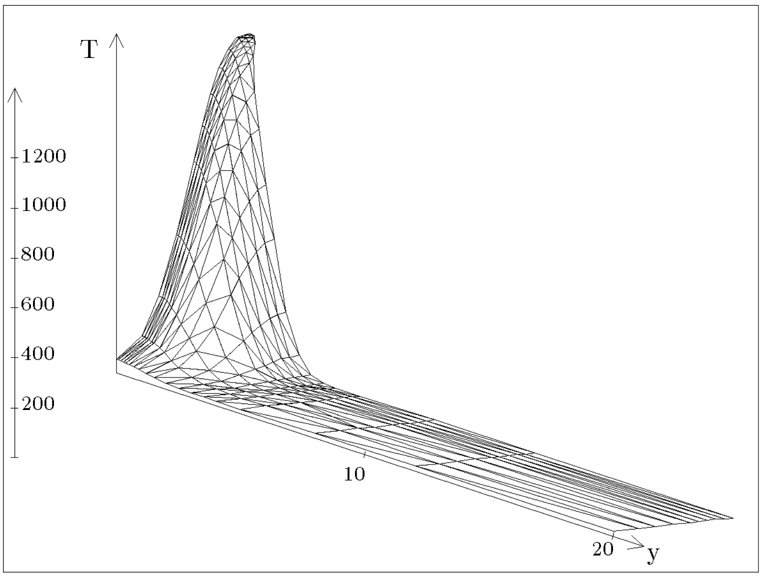


Abbildung 5.9: Temperaturfeld des Basiszyklus nach 6 Sekunden

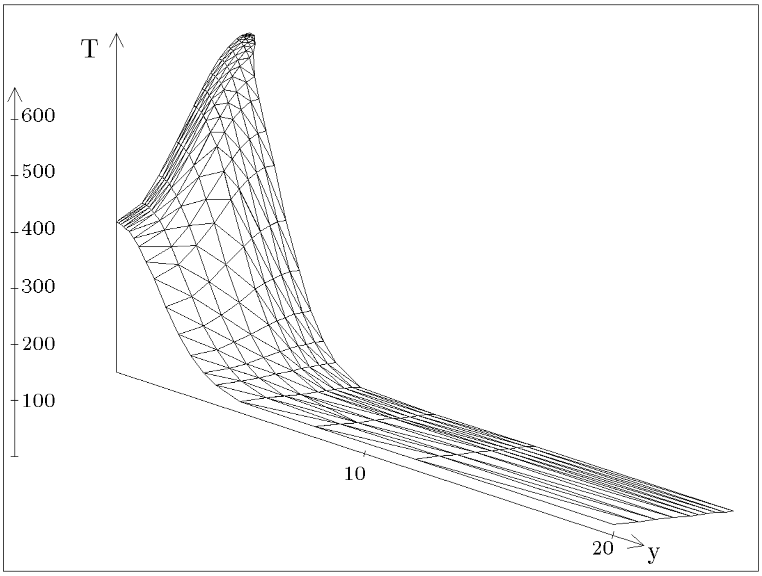


Abbildung 5.10: Temperaturfeld des Basiszyklus nach 16 Sekunden

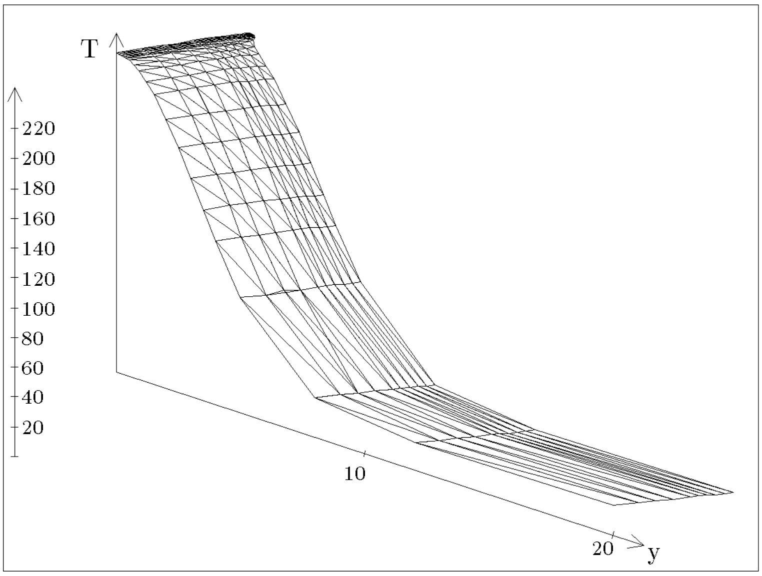


Abbildung 5.11: Temperaturfeld des Basiszyklus nach 1 Minute

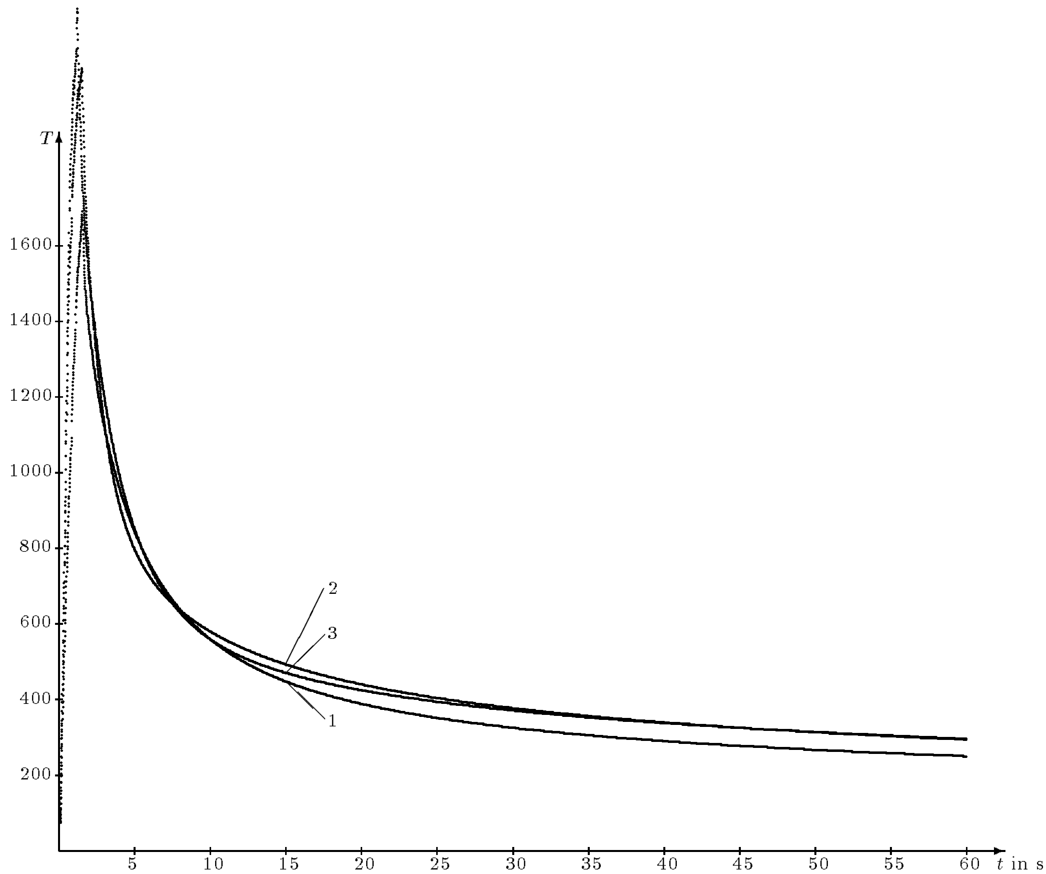


Abbildung 5.12: Temperatur-Zeit-Zyklen für Mehrlagenschweißen

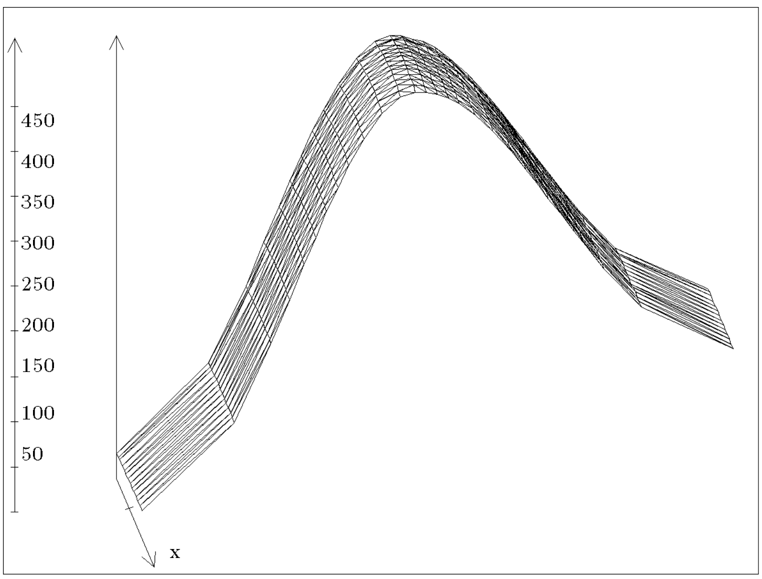


Abbildung 5.13: Temperaturfeld der Schwarz-Weiß-Verbindung nach 90 Sekunden

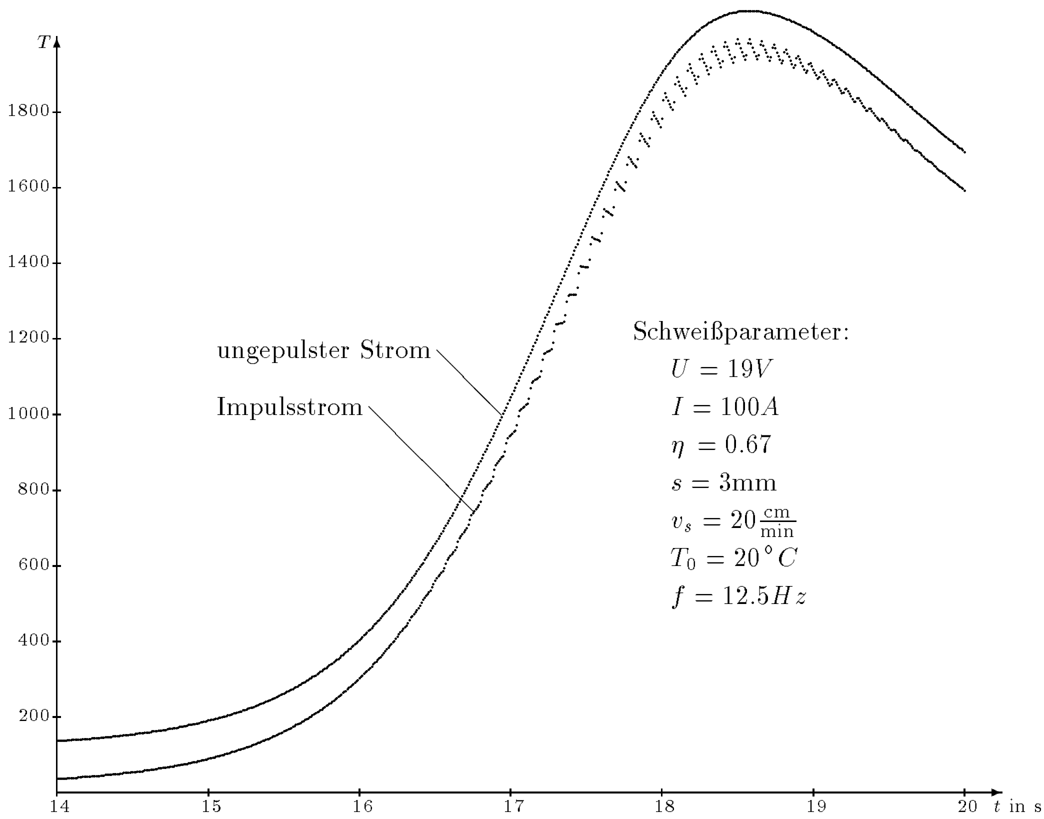


Abbildung 5.14: Temperatur-Zeit-Zyklen für Impulsschweißen

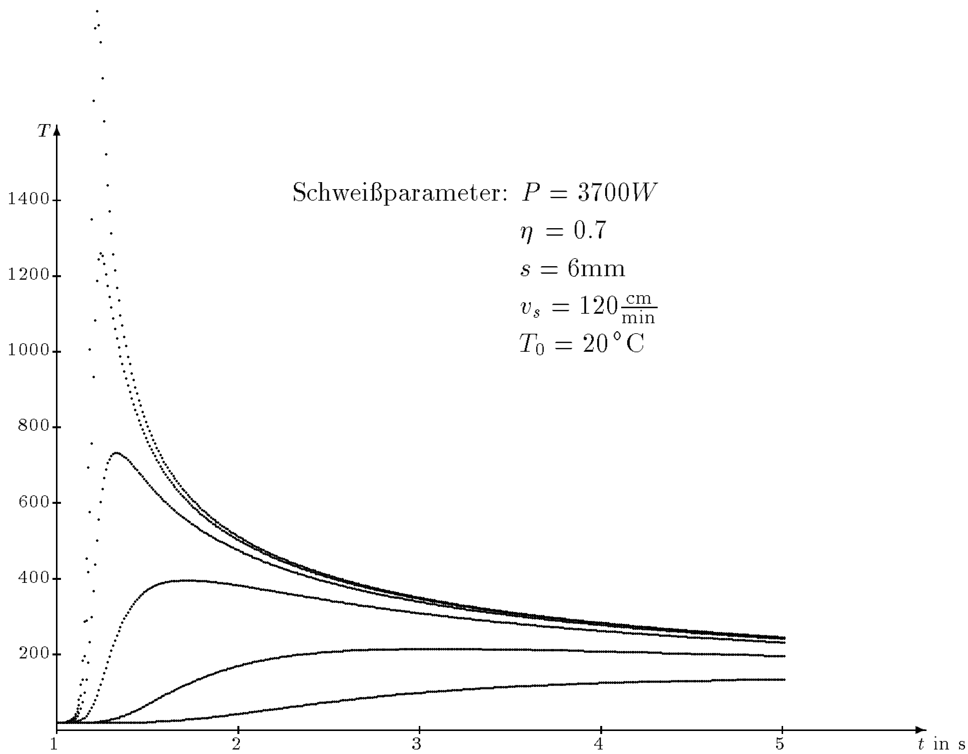


Abbildung 5.15: Temperatur-Zeit-Zyklen für Laserschweißen

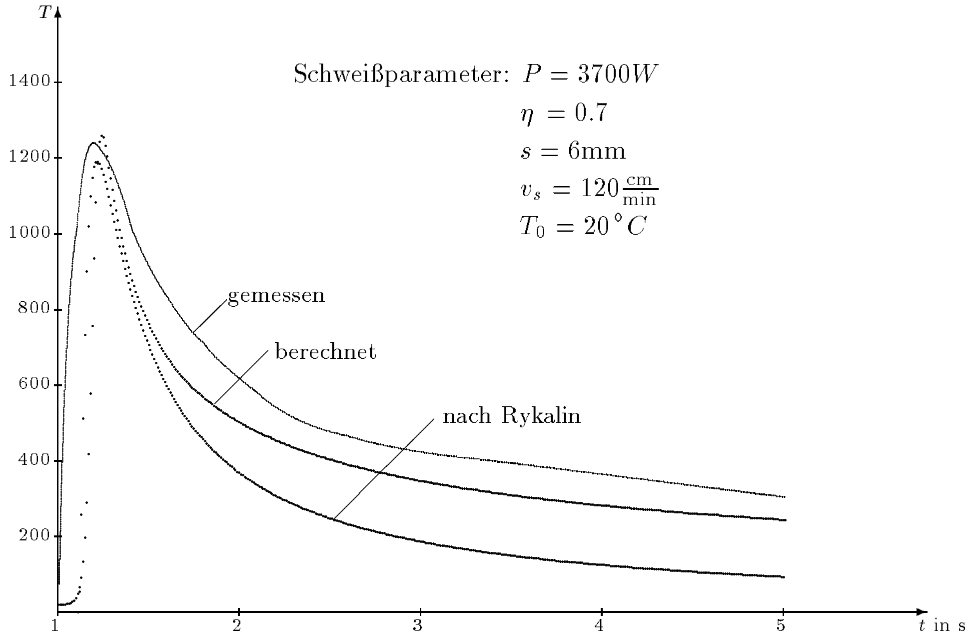


Abbildung 5.16: Temperatur-Zeit-Zyklen für Laserschweißen

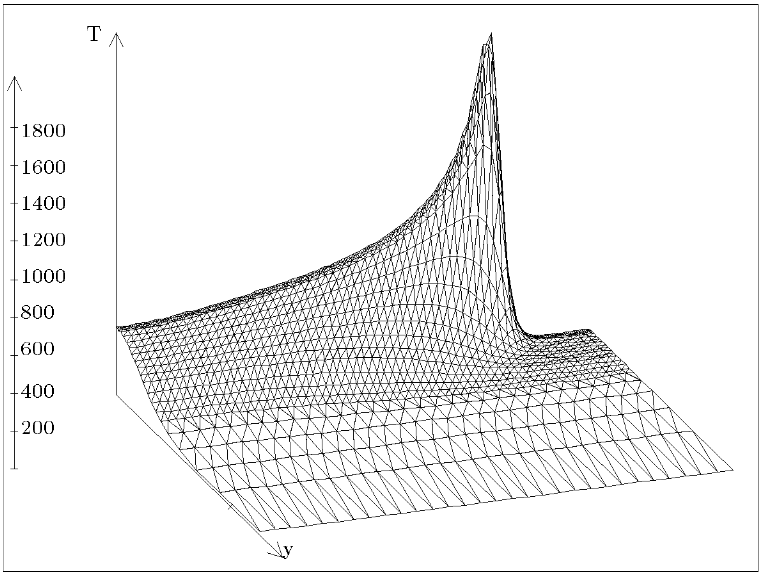


Abbildung 5.17: Temperaturfeld beim Laserschweißen nach 1.2 Sekunden

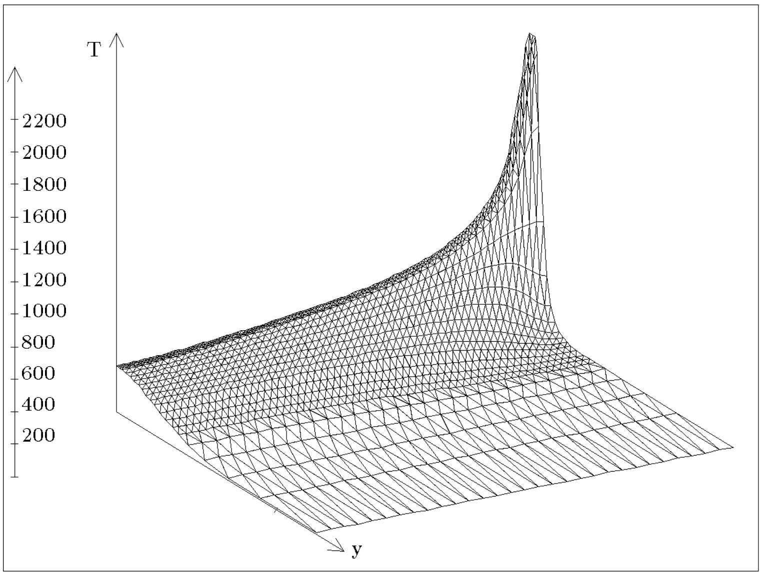


Abbildung 5.18: Temperaturfeld beim Laserschweißen nach 1.5 Sekunden

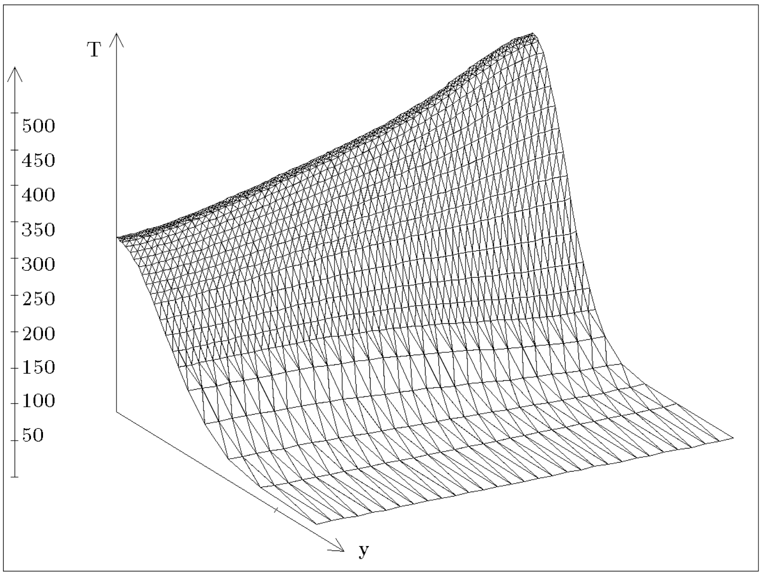


Abbildung 5.19: Temperaturfeld beim Laserschweißen nach 2.2 Sekunden

Anhang A

Programm TEMFELD

Das Programm TEMFELD dient zur Berechnung von Temperaturfeldern, die beim Schweißen und Schneiden entstehen. Im Programm werden dazu mit der Methode der Finiten Elemente (FEM) ebene instationäre Temperaturfelder berechnet. Für die Programmierung wurde die Programmiersprache Borland-Pascal 7.0 benutzt und mit Turbo-Vision 2.0 eine Benutzeroberfläche im SAA-Standard erstellt. An dieser Stelle soll die Arbeit mit dem Programm TEMFELD, das im Rahmen dieser Dissertation entstand, an einem Beispiel kurz erläutert werden. Gegeben sei ein Plattenstreifen mit den Abmessungen 20cm x 3cm. Aus Symmetriegründen braucht man hier nur den halben Streifen zu betrachten. Um ein Temperaturfeld für diese Platte zu berechnen, muß zuerst das Modell ausgewählt werden, nach dem die Platte modelliert werden soll. Die Platte sei jetzt 0.3cm dick und kann damit mit dem Modell der dünnen Platte, in der kein Temperaturunterschied zwischen der Grundfläche und der Deckfläche besteht, berechnet werden. Dazu wird jetzt in der Menuleiste der Punkt „Modell“aktiviert. Hier wird der Button „Platte“ausgewählt. Außerdem muß man bei „Dicke in cm“0.3 eintragen. Mit dem „OK“-Schalter werden die Werte in das Programm übernommen.

Vernetzung

Falls keine fertige Vernetzung geladen werden soll, muß mit dem manuellen oder halbautomatischen Netzgenerator eine Vernetzung erzeugt werden. Hier soll beispielsweise eine Typ-I-Vernetzung mit dem halbautomatischen Netzgenerator erstellt werden. Dazu muß aus dem Menu „Netz“der Punkt „halbautomatisch“ausgewählt werden. In der daraufhin erscheinenden Eingabemaske werden jetzt die x-Koordinaten eingegeben, z. B. 0, 0.3, 0.6, 1, 1.5, 2, 2.6, 3.3, 4, 5, 6.5, 8 und 10. Mit dem „OK“-Schalter werden die Werte dann ins Programm übernommen. In der folgenden Eingabemaske werden für die y-Koordinaten 0, 0.3, 0.6, ..., 2.7 und 3 eingegeben. Mit „Netz|Parameter“erfährt man jetzt, daß eine Vernetzung mit 240 Elementen, 143 Knotenpunkten und einer Bandbreite des daraus resultierenden linearen Gleichungssystems von 13 erzeugt wurde. Mit „Netz|Speichern“kann die erzeugte Vernetzung jetzt für spätere Wiederverwendung auf der Festplatte gesichert werden.

Anfangs- und Randbedingungen

Im Menu „AB+RB|AB setzen“können jetzt die Anfangsbedingungen für die einzelnen Knotenpunkte festgelegt werden. In der hier erscheinenden Eingabemaske wird jetzt in der Eingabezeile bei „Temperatur in °C“20 eingegeben und anschließend erhalten mit dem Schalter „Set All“alle Knotenpunkte diese Temperatur. Anschließend kann bei Bedarf die Anfangstemperatur für einzelne Knoten individuell geändert werden. Mit dem „OK“-Schalter werden diese Werte dann wieder ins Programm übernommen. Mit dem Menupunkt „AB+RB|RB setzen“werden jetzt die Randbedingungen eingegeben. Über die Plattenoberfläche wird jetzt Wärme an die Umgebung abgegeben. Deshalb wird im Eingabefeld die Box Nummer 0 ausgewählt. Die Wärme aus dem Lichtbogen tritt senkrecht zur Plattenebene in das Bauteil ein. Dafür wird die Box Nummer 4 ebenfalls ausgewählt. Mit dem Schalter „Set All“werden diese Randbedingungen bei allen Elementen gesetzt. Außerdem tritt jetzt noch Konvektion an den Plattenrändern bei x=10cm, y=0cm und y=3cm auf. In der Liste der Elemente wird daher zuerst Element 1 ausgewählt und im Eingabefeld Box 1 ebenfalls aktiviert. Dies entspricht der Konvektion durch den Anteil des Randes bei y=0cm, der zu Element 1 gehört. Mit dem „Replace“-Schalter wird diese Randbedingung gesetzt. Ebenso wird mit dem Randanteil für y=0cm bei den Elementen 21, 41, ..., 221 verfahren. Für den Rand bei y=3cm muß analog die Box 2 bei den Elementen 20, 40, ..., 240 gesetzt werden. Und schließlich wird für den Rand bei x=10cm die Box 2 bei den Elementen 221, 223, ..., 239 gesetzt. Mit dem „OK“-Schalter werden die Randbedingungen ebenfalls in das Programm übernommen.

Schweißparameter

Jetzt können die Schweißwärmequellen vereinbart werden. Dazu muß im Menu „Quellen“der Punkt „New“ausgewählt werden. Zuerst wird die Art der Quelle markiert und dann die Schweißparameter in den Eingabefeldern eingegeben. In unserem Beispiel soll eine I-Naht einseitig MAG-geschweißt werden. Damit ergibt sich eine Lage und eine Wärmequelle. Für MAG muß bei „Art der Wärmequelle“elektrisch markiert werden und als Schweißparameter z. B. U=20V, I=130A, η=0.67, $v_s = 20\frac{\text{cm}}{\text{min}}$ und $r_H = 0.7$cm eingegeben werden. Die Naht beginnt zum Zeitpunkt t=0s bei x=0cm, y=0cm und endet bei x=0cm, y=3cm. Mit dem „Save“-Schalter werden die Werte in das Programm übernommen.

Berechnung

Jetzt sind alle erforderlichen Werte eingegeben, um die Berechnung zu starten. Die Berechnung wird mit dem Menu „Run“gesteuert. Mit dem Punkt „Run|RechenParameter“werden die Zeitschrittweite und die Zeit, bis zu der ohne Unterbrechung gerechnet werden soll, eingestellt. Anschließend wird mit „Run|Run“die Berechnung gestartet. Wenn die Rechnung z. B. bis t=4.5s geht und anschließend mit „Temperaturen|graphische Ausgabe“das Temperaturfeld gezeichnet wird, erkennt man, daß sich der Lichtbogen gerade in der Mitte der Naht befindet. Die Vernetzung wird durch Drücken der Taste „V“mit dargestellt. Beendet wird die Graphik mit „W“. Mit „Temperaturen|Speichern“können die berechneten Ergebnisse in eine Datei gespeichert werden. Um diese Resultate später wieder zu verwenden, müssen die Vernetzung durch „Netz|Laden“und die Temperaturwerte durch „Temperaturen|Laden“wieder geladen werden.

Dateien auf der Diskette

In den einzelnen Verzeichnissen auf der Diskette befinden sich folgende Dateien:

BEISPIEL	Vernetzung und Randbedingungen für obiges Beispiel
LASER	Dateien für das Laserschweißen aus Abschnitt 5.2
MEHRLAGE	Dateien für das Mehrlagenschweißen aus Abschnitt 5.2
PROGRAM	eine lauffähige Version des Programms TEMFELD
QUELLEN	Quelltexte für das Programm TEMFELD
SCHWAWEI	Dateien für die Schwarz-Weiß-Verbindung aus Abschnitt 5.2

Anhang B

Tensorschreibweise

1. Die Koordinaten werden mit 1, 2 und 3 bezeichnet. Indizes wie $i, j, k, \ldots$ laufen immer von 1 bis 3.

2. Vektoren erhalten einen Index, Tensoren zweiter Stufe erhalten zwei Indizes usw.

3. Tritt in einem Term ein Index doppelt auf, so wird über diesen Index von 1 bis 3 summiert, z. B.

$$\sigma_{ii} = \sum_{i=1}^{3} \sigma_{ii} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}.$$

   Diese Vereinbarung heißt Einsteinsche Summenkonvention.

4. Ein sich nicht wiederholender Index bedeutet, daß die Formel dreimal für jeweils 1 bis 3 aufzuschreiben ist, z. B.

$$\sigma_{ij}\nu_j = p_i \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}\nu_1 + \sigma_{12}\nu_2 + \sigma_{13}\nu_3 = p_1 \\ \sigma_{21}\nu_1 + \sigma_{22}\nu_2 + \sigma_{23}\nu_3 = p_2 \\ \sigma_{31}\nu_1 + \sigma_{32}\nu_2 + \sigma_{33}\nu_3 = p_3 \end{array} \right. .$$

5. Steht vor einem Index ein Komma, so wird nach diesem Index differenziert, z. B.

$$\sigma_{1j,j} = \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3}.$$

6. Der Einheitstensor zweiter Stufe wird mit

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   bezeichnet.

Literaturverzeichnis

[1] Aziz, A.K. u. Monk, Peter
Continuous Finite Elements in Space and Time for the Heat Equation Mathematics of Computation Vol. 52, Number 186
Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1989, S. 255 – 274; 2 Abb.
Übers. d. Sacht.: Kontinuierliche Finite Elemente in Raum und Zeit für die Wärmeleitungsgleichung

[2] Bathe, Klaus-Jürgen u. Wilson, Edward L.
Numerical methods in Finite Element Analysis
Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice–Hall, 1976 – 528 S. ; viele Abb.
Übers. d. Sacht.: Numerische Methoden in der Finiten Elemente Analysis

[3] Beltschuk, G.A., Gatowski,K.M. u. Koch, B.A.
(Белчук, Г.А., Гатовский, К.М. и Кох,Б.Ф.)
Сварка в судостроение
Leningrad: Verlag Sudostroenie, 1980
Übers. d. Sacht.: Schweißen im Schiffbau

[4] Birger, I. A. u. Schorr, B. F. (Биргер, И.А. и Шорр, Б.Ф.)
Термопрочность деталей машин
Moskau: Maschinostroenie, 1975
Übers. d. Sacht.: Wärmefestigkeit von Maschinenteilen

[5] Braess, Dietrich
Finite Elemente
Springer-Verlag, 1992 – 302 S. ; 47 Abb.

[6] Duvaut, Georges u. Lions, Jacques-Louis
Неравенства в Механике и Физике
Moskau: Naukowa Dumka, 1980 – 384 S. : 29 Abb.
Übers. d. Sacht.: Ungleichungen in Mechanik und Physik

[7] Gatowski, Klementi Markowitsch u. Karchin, Viktor Akimowitsch
(Гатовский, Клементий Маркович и Кархин, Виктор Акимович)
Теория сварочных деформаций и напряжений
Leningrad: Schiffbauinstitut, 1980 – 331 S.: zahlr. Abb.
Übers. d. Sacht.: Theorie der Schweißspannungen und -deformationen

[8] Goering, Herbert; Roos, Hans–Görg u. Tobiska, Lutz
Finite-Element-Methode
Berlin: Akademie – Verlag, 1988 – 193 S.: 51 Abb. u. 13 Tabellen

[9] Grisvard,P.
Elliptic problems in nonsmooth domains
Boston, London, Melbourne: Pitman, 1985 – 410 S.
Übers. d. Sacht.: Elliptische Probleme in nicht glatt berandeten Gebieten

[10] Großmann, Christian; Roos, Hans–Görg
Numerik partieller Differentialgleichungen
Stuttgart: Teubner – Verlag, 1992 – 477 S.: 79 Abb.

[11] Habermann, Richard
Elementary applied partial differential equations
Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall, 1987 – 547 S.: zahlr. Abb.
Übers. d. Sacht.: Einführung in partielle Differentialgleichungen

[12] Herter, R.; Kirsten, H.; Malonek, H.; Sommer, R. u. Tichatschke, R.
Mathematische Modellierung von thermischen und technologischen Prozessen beim Schweißen
Halle, Pädagogische Hochschule, 1987 – 39 S. : 7 Abb. Studie

[13] Kaliszky, Sandor
Plastizitätslehre: Theorie und technische Anwendungen
Budapest: Akademiai Kiado, 1984 – 497 S. : zahlr. Abb.

[14] Kirsch, S.; Schwenzfeger, G. u. Tichatschke, R.
Mathematische Modellierung beim Widerstandspunktschweißen
Halle, Pädagogische Hochschule, 1987 – 21 S., Studie

[15] Knöfel, R.
Berechnung des Temperaturfeldes beim Schweißen und Schneiden langer Nähte und Schnitte
Rostock, Wilhelm–Pieck–Universität, Ingenieurschule für Schiffbautechnik, 1982 – 72S. : 35 Abb. Abschlußbericht

[16] Korneev, Vadim G. u. Langer, Ulrich
Approximate Solution of Plastic Flow Theory Problems
Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft, 1984 – 252 S.: 21 Abb.
Übers. d. Sacht.: Näherungslösungen der plastischen Fließtheorie

[17] Langenbach, Arno
Variationsmethoden in der nichtlinearen Elastizitäts- und Plastizitätstheorie
Wiss. Zeitschrift d. Humboldt-Universität Heft 2 1959/60
Berlin: Humboldt-Universität, 1959/60 – S. 145 - 164; 2 Abb.

[18] Machnenko, V. I. (Махненко, В.И.)
Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций
Kiew: Naukowa Dumka, 1976 – 320 S. : zahlr. Abb.
Übers. d. Sacht.: Rechenmethoden für die Untersuchung der Kinetik von Schweißspannungen und -deformationen

[19] Maeß, Gerhard
Vorlesungen über numerische Mathematik I
Berlin: Akademie-Verlag, 1984 – 231 S.: 23 Abb. 19 Tab.

[20] Markov,Sergej P. u. Gatovskij, Klementi Markowitsch
Mathematische Bestimmung des Spannungs- und Deformationszustandes beim Schweißen statisch unbestimmter Stabkonstruktionen
Schiffbauforschung 30(1991)2 – S. 79 -82, 6 Abb.

[21] Michlin, Solomon Grigorevic
Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik
Berlin: Akademie-Verlag, 1978 – 519 S.: 56 Abb.

[22] Michlin, Solomon Grigorevic
Variationsmethoden der mathematischen Physik
Berlin: Akademie-Verlag, 1962 – 464 S. : 21 Abb. 7 Tab.

[23] Penzel, J.
Lösung der Fourier-Kirchhoffschen Differentialgleichung mit Hilfe der Methode der finiten Elemente für die Berechnung von Schweißvorgängen
Dresden, Technische Universität, 1985 – nn S. : mm Abb. Dissertation A

[24] Radaj, Dieter
Wärmewirkungen des Schweißens: Temperaturfeld, Eigenspannungen, Verzug
Berlin: Springer–Verlag, 1988 – 265S.: 222 Abb. 5 Tab.

[24a] Radaj, Dieter
Heat Effects of Welding
Berlin: Springer–Verlag, 1992 – 348S.: 265 Abb. 5 Tab.
Übers. d. Sacht.: Wärmewirkungen des Schweißens

[25] Rektorys,Karel
Variationsmethoden in Mathematik, Physik und Technik
München, Wien: Carl–Hanser–Verlag, 1984

[26] Richter, Friedhelm
Physikalische Eigenschaften von Stählen und ihre Temperaturabhängigkeit
Düsseldorf: Verlag Stahleisen m. b. H., 1983 – 26 Abb. 11 Tab.

[27] Richter, Uwe
Mathematische Modelle für die Wärmeausbreitung in festen Körpern
Rostock, Wilhelm–Pieck–Universität, Sektion Mathematik, 1988 – 47S. : 10 Abb. Jahresarbeit

[28] Richter, Uwe
Mathematische Modelle für den Schweißprozeß
Rostock, Wilhelm–Pieck–Universität, Sektion Mathematik, 1989 – 50S. : 12 Abb. Diplomarbeit

[29] Rykalin, N. N.
Die Wärmegrundlagen des Schweißvorganges
Berlin, Verlag Technik, 1952 – 265 S.: 123 Abb., 25 Taf.

[30] Rykalin, N. N.
Berechnung der Wärmevorgänge beim Schweißen
Berlin, Verlag Technik, 1957 – 326 S.: 173 Abb., 4 Taf.

[31] Sändig, Anna-Margarete; Richter, Uwe; Sändig, Rainer
The Regularity of Boundary Value Problems for the Lamé Equations in a Polygonal Domain
Rostocker Mathematisches Kolloquium Nummer 36
Rostock, Wilhelm–Pieck–Universität, 1989 – S. 21 - 50; 7 Abb.
Übers. d. Sacht.: Die Regularität der Randwertprobleme für die Laméschen Gleichungen in einem polygonal berandetem Gebiet

[32] Schwarte, J. *Temperaturfeldberechnungen für das Laserschweißen von Blechen*
Rostock: 1994 – 20 S.: 80 Abb.

[33] Schwarte, J.
Temperaturfeldberechnungen zum Laserschweißen von Blechen
Rostock: 1994 – 10 S.: 58 Abb.

[34] Schwarz, Hans Rudolf
Methode der finiten Elemente
Stuttgart: B. G. Teuber, 1980 – 320 S. : 155 Abb. ; 49 Tab.

[35] Schwarz, Hans Rudolf
FORTRAN-Programme zur Methode der finiten Elemente
Stuttgart: B. G. Teuber, 1981 – 208 S. : 15 Abb.

[36] Segerlind, Larry J.
Применение метода конечных элементов
Moskva: Mir, 1979 – 392 S. : zahlr. Abb.
Übers. d. Sacht.: Anwendung der Methode der Finiten Elemente

[37] Seyffarth, Peter
Wärmeausbreitung beim Schweißen Schweißtechnik für Schiffbautechnologen: 2. Lehrbrief
Rostock, Wilhelm–Pieck–Universität, 1983 – 64 S.: 24 Abb.

[38] Temam, Roger
Mathematical problems in plasticity
Paris : gauthier-villars, 1983 – 354 S.:
Übers. d. Sacht.: Mathematische Probleme der Plastizität

[39] Thieme, Günther
Fachkunde für Schweißer Band 1: Grundausbildung im Schweißen des Stahls
Berlin, Verlag Technik, 24., bearb. Aufl. 1989 – 244 S.: 208 Abb., 55 Taf.

[40] Triebel, Hans
Höhere Analysis Hochschullehrbücher für Mathematik
Berlin: Dt. Verl. der Wissenschaften, 1972 – 42 Abb.

[41] Vladimirov, Vasilij Sergeevic
Gleichungen der mathematischen Physik
Berlin: Dt. Verl. d. Wissenschaften, 1972 – 379 S.: 76 Abb.

[42] Weiß, Dietmar
Finite-Elemente-Simulation von Temperaturfeld und Schmelzbaddeformation beim Lichtbogenschweißen
Magdeburg, Otto-von-Guericke-Universität, 1994 – 120 S. : 47 Abb. Dissertation A

[43] Wloka, J.
Partielle Differentialgleichungen Sobolevräume und Randwertaufgaben
Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft, 1982 – 500 S.: 24 Abb.

[44] Zeidler, Eberhard
Nonlinear Functional Analysis and its Applications
Vol. I – V
New York, Berlin, Heidelberg: Springer–Verlag
Übers. d. Sacht.: Nichtlineare Funktionalanalysis und ihre Anwendungen

[44a] Vol. I: *Fixed-Point Theorems*
1986 – 897 S. ; 158 Abb.
Übers. d. Sacht.: Fixpunktsätze

[44b] Vol. II/A: *Linear Monotone Operators*
1990 – 467 S.; 45 Abb.
Übers. d. Sacht.: Lineare Monotone Operatoren

[44c] Vol. II/B: *Nonlinear Monotone Operators*
1990 – 1202 S.; 74 Abb.
Übers. d. Sacht.: Nichtlineare Monotone Operatoren

[44d] Vol. III: *Variational methods and optimization*
1985 – 662 S.; 111 Abb.
Übers. d. Sacht.: Variationsmethoden und Optimierung

[44e] Vol. IV: *Applications to Mathematical Physics*
1988 – 975 S.: 201 Abb.
Übers. d. Sacht.: Anwendungen in der Mathematischen Physik

[44f] Vol. V: *Applications to Mathematical Physics*
Übers. d. Sacht.: Anwendungen in der Mathematischen Physik

[45] Zienkiewicz, O. C.
Methode der Finiten Elemente
Leipzig: Fachbuchverlag, 1974 – 496 S. : 214 Abb.

Erklärung

Ich erkläre, daß ich die vorliegende Arbeit
selbständig und nur unter Verwendung der
angegebenen Literatur und Hilfsmittel
angefertigt habe.

Rostock, den 30.Mai 1995

Thesen zur Dissertation

Mathematische Modelle für thermische Vorgänge beim Schweißen

von Uwe Richter

1. Die örtlich begrenzte Wärmeeinbringung beim Schweißen beeinflußt über das inhomogene Temperaturfeld die Ausbildung von Eigenspannungen, von elastischen und plastischen Deformationen sowie von Gefügeveränderungen. Deshalb werden in dieser Arbeit mathematische Modelle der thermisch bedingten Eigenspannungen beim Schweißen untersucht. Das dient dem Ziel, ein Modell zu entwickeln, das numerisch bearbeitet werden kann. Dadurch sollen auch schwierige Schweißtechnologien auf Computern berechenbar werden.

2. In dünnen Platten und beim Schweißen massiver Körper mit leistungsstarken schnellen Wärmequellen ist eine zweidimensionale Modellierung der Wärmeausbreitung gerechtfertigt. Dadurch wird eine erhebliche Reduzierung des Rechenaufwands erreicht und numerische Simulationen können in vertretbarer Zeit durchgeführt werden.

3. Für die Ausbildung der Eigenspannungen ist der Temperaturbereich von 850°C bis 500°C von entscheidener Bedeutung. Deshalb kann für das Schweißbad, das sich ja ab 1520°C bildet, ein relativ einfaches Modell gewählt werden. Für die Genauigkeit der Ergebnisse ist es ausreichend, die hydrodynamischen Vorgänge im Schweißbad durch eine erhöhte Wärmeleitfähigkeit zu modellieren.

4. Die für die Temperaturfelder beim Schweißen zur Verfügung stehenden analytischen Lösungen der Quellentheorie von Rykalin beruhen auf starken Schematisierungen und Vereinfachungen. Diese Lösungen sind daher nur in begrenztem Maße anwendbar. Insbesondere bei geringen Bauteilabmessungen, temperaturabhängigen Werkstoffkennwerten und starkem Wärmeaustausch mit der Umgebung bieten sich numerische Lösungen an.

5. Die Wärmeausbreitung im Werkstück kann durch das Funktional

$$\begin{aligned} F(T) \;=\; & \iint\limits_{\Omega} \lambda(x,y)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + \lambda(x,y)\cdot\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 \\ & -2\cdot T\cdot Q + 2\cdot T\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Big(c(x,y)\cdot\varrho(x,y)\cdot T\Big)\,dxdy \\ & -\int_{S_2} 2\cdot T\cdot\Phi\,dS + \int_{S_3}\alpha_T(x,y)\cdot T\cdot(T-2\cdot T_{um})\,dS \end{aligned}$$

beschrieben werden. Auf der Menge

$$V = \{u : u\in W^{1,2}(\Omega);\; u = T_D \text{ auf } S_1\}$$

nimmt $F(T)$ sein eindeutig bestimmtes Minimum an. Dieses Funktional ist deshalb für die numerische Berechnung der Wärmeausbreitung im Werkstück geeignet.

6. Die Bilinearform für die elastischen Deformationen

$$a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = \iint_\Omega \quad G \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} + (G+\lambda) \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} d\Omega$$

nimmt im Raum

$$X = \{\underline{\phi} : \Omega \to \mathbb{R}^3; \phi_i \in W^{1,2}(\Omega); \phi_i = 0 \quad \text{auf} \quad S_6\}$$

ihr eindeutig bestimmtes Minimum an.

7. Die Bilinearform für plastische Probleme

$$a_e(\underline{\phi}, \underline{\psi}) + \eta a_p(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = < \underline{f}, \underline{\phi} >$$

mit

$$a_p(\underline{\phi}, \underline{\psi}) = \iint_\Omega \quad \frac{E}{1+\mu} \frac{1}{2\tau_F^2} \sum_{i,j,k,l=1}^{3} s_{ij} s_{kl} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_l} d\Omega$$

ist i.a. nicht V-elliptisch. Damit können die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit den üblichen analytischen Methoden nicht gesichert werden.

8. Aus der semidiskreten Gleichung für die Temperaturen

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K]\{T\} = \{F\}$$

erhält man mit der Crank-Nicolson-Methode die Beziehung

$$\left([K] + \frac{2}{\Delta t}[C] \right) \{T\}_k = \left(\frac{2}{\Delta t}[C] - [K] \right) \{T\}_{k-1} + \{F\}_k + \{F\}_{k-1} \quad .$$

Auf jeder Zeitschicht hat man damit ein lineares Gleichungssystem, in dessen rechte Seite die Temperaturwerte auf der vorhergehenden Zeitschicht mit eingehen.

9. Existenz und Eindeutigkeit des Temperaturfeldes sind für variable Wärmeleitfähigkeit $\lambda(x, y, t)$ gesichert. Für nichtlineare, das heißt temperaturabhängige Wärmeleitfähigkeit $\lambda(T)$ muß man deshalb bei der numerischen Lösung vor dem Zeitschritt von t_{k-1} nach t_k nach der Beziehung

$$\lambda(x, y, t_k) = \lambda\left(T(x, y, t_{k-1})\right)$$

für diesen Zeitschritt variable Wärmeleitfähigkeitswerte bestimmen.

10. Die in der Arbeit vorgestellten Modelle wurden für Mehrlagenschweißen, Impulslichtbogenschweißen, Laserschweißen sowie für verschiedene Wärmeführungen und bei Schwarz-Weiß-Verbindungen getestet. In allen Fällen ergab sich eine gute Übereinstimmung zwischen numerisch und experimentell ermittelten Temperaturfeldern. Das bedeutet, daß die vorgestellten Modelle die thermischen Vorgänge ausreichend genau widerspiegeln.

11. Das im Rahmen der Arbeit entwickelte Programm ermöglicht dem Schweißingenieur die Berechnung von Temperaturfeldern auf Grund schweißtechnisch relevanter Eingabegrößen und ist damit für die Anwendung am Arbeitsplatz geeignet.

Lebenslauf

Name:	Uwe Richter
Geburtsdatum:	16.10.1962
Geburtsort:	Greifswald
Familienstand:	ledig
Staatsangehörigkeit:	deutsch
Schule:	1969-1974 Allgemeinbildende Polytechnische Oberschule, Saßnitz
	1974-1977 Allgemeinbildende Polytechnische Oberschule, Stralsund
	1977-1981 Erweiterte Polytechnische Oberschule, Stralsund
	15.07.1981 Abitur mit „Sehr gut “
Hochschule:	1984-1989 Universität Rostock, Studium der Mathematik
	1989-1992 Universität Rostock, Forschungsstudent Mathematik
	1992-1995 Universität Rostock, Wiss. Assistent am Fb. Mathematik
	seit 01.04.1995 Universität Rostock, Wiss. Assistent am Fb. Elektrotechnik
Kenntnisse:	Fremdsprachen: Russisch, Englisch, Französisch
	Führerschein: Klasse III
Hobbies:	Schach, Lesen, Computer